

# Ćwiczenia Laboratoryjne z Wytrzymałości Materiałów

Praca zbiorowa

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Politechnika Łódzka

Łódź 2024



Wydział Mechaniczny  
Politechniki Łódzkiej



## LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Praca wykonana na podstawie książki Ćwiczenia Laboratoryjne z Wytrzymałości Materiałów pod redakcją Mirosława Banasiaka PWN

Poszczególne rozdziały opracowali:

- Ćwiczenie 1 Paweł Czapski, Monika Zaczyńska
- Ćwiczenie 2 Adrian Gliszczyński
- Ćwiczenie 3 Leszek Czechowski
- Ćwiczenie 4 Jan Grudziecki
- Ćwiczenie 5 Jacek Świniarski
- Ćwiczenie 6 Monika Zaczyńska, Jacek Jankowski
- Ćwiczenie 7 Adrian Gliszczyński
- Ćwiczenie 8 Jacek Jankowski
- Ćwiczenie 9 Tadeusz Niezgodziński
- Ćwiczenie 10 Tomasz Kubiak
- Ćwiczenie 11 Monika Zaczyńska, Paweł Czapski
- Ćwiczenie 12 *w przygotowaniu*
- Ćwiczenie 13 Jacek Świniarski
- Ćwiczenie 14 Radosław Mania
- Ćwiczenie 15 Zbigniew Kołakowski
- Ćwiczenie 16 Leszek Czechowski

Wsparcie techniczne mgr inż. Wiesław Błażejowski

Redakcja: dr inż. Jan Grudziecki

# LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

## Spis treści

Ćwiczenie 1: PRÓBA STATYCZNA ROZCIĄGANIA METALI .....	4
Ćwiczenie 2: PRÓBA STATYCZNA ŚCISKANIA METALI.....	15
Ćwiczenie 3: PRÓBA UDARNOŚCI METALI.....	24
Ćwiczenie 4: PRÓBA TWARDOŚCI.....	31
Ćwiczenie 5: WYZNACZANIE WYTRZYMAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ METALI (PRÓBA PRZYSPIESZONA).....	52
Ćwiczenie 6: WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W BELCE ZGINANEJ METODĄ TENSOMETRII OPOROWEJ.....	77
Ćwiczenie 7: WYZNACZANIE MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI POSTACIOWEJ G PRZEZ POMIAR KĄTA SKRĘCENIA PRĘTA O PRZEKROJU KOŁOWYM I PROSTOKĄTNYM .....	91
Ćwiczenie 8: BADANIE WYBOCZENIA PRĘTA ŚCISKANEGO .....	105
Ćwiczenie 9: BADANIE ODKSZTAŁCEŃ RAMY .....	113
Ćwiczenie 10: BADANIE ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYNY ŚRUBOWEJ .....	118
Ćwiczenie 11: LINIA UGIĘCIA BELKI .....	126
Ćwiczenie 12: <i>W PRZYGOTOWANIU</i> .....	133
Ćwiczenie 13: WYZNACZANIE POŁOŻENIA ŚRODKA SIŁ POPRZECZNYCH.....	134
Ćwiczenie 14: BADANIE ZBIORNIKA CIŚNIENIOWEGO .....	141
Ćwiczenie 15: ZGINANIE UKOŚNE .....	150
Ćwiczenie 16: WYZNACZANIE SKŁADOWYCH PŁASKIEGO STANU NAPRĘŻENIA W PŁYTCIE PRZY ZASTOSOWANIU TENSOMETRÓW ELEKTROOPOROWYCH.....	159

## Ćwiczenie 1

### PRÓBA STATYCZNA ROZCIĄGANIA METALI

#### 1.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobem przeprowadzania statycznej próby rozciągania. Ponadto ćwiczenie ma na celu określenie, na podstawie próby statycznej rozciągania, następujących właściwości mechanicznych materiału: wytrzymałości na rozciąganie, granicy plastyczności, modułu Younga, wydłużenia.

#### 1.2. Wprowadzenie

Próba rozciągania metali jest podstawowym badaniem metali mającym na celu określenie właściwości mechanicznych badanych materiałów. Próba polega na osiowym rozciąganiu próbki do badań, na ogół aż do zerwania przy użyciu specjalnych maszyn, nazywanych maszynami wytrzymałościowymi lub zrywarkami. Próba ta objęta jest Polską Normą PN-EN ISO 6892-1 „Metale. Próba rozciągania. Metoda badania w temperaturze pokojowej.” zgodnej z normą europejską EN 6892-1.

#### 1.3. Rodzaje próbek

Badania przeprowadza się na próbkach o znormalizowanych kształtach i wymiarach. Próbkę do badań wykonuje się zwykle obróbką skrawaniem próbki wyrobu, próbki wstępnie wyciętej na prasie albo odlewu. Wyroby o niezmiennym przekroju poprzecznym (profile, pręty, druty itp.), jak również odlane próbki do badań mogą być badane bez obróbki skrawaniem. Należy unikać ich wycinania palnikiem acetylenowym, aby nie spowodować miejscowego nagrzania, mogącego zmienić właściwości mechaniczne próbki.

Każda próbka posiada część pomiarową oraz części służące do mocowania w maszynie wytrzymałościowej. Preferowane próbki do badań mają określony stosunek początkowej długości pomiarowej ( $L_0$ ) do początkowego pola przekroju poprzecznego ( $S_0$ ), wyrażony zależnością:

$$L_0 = k \cdot \sqrt{S_0} \quad (1)$$

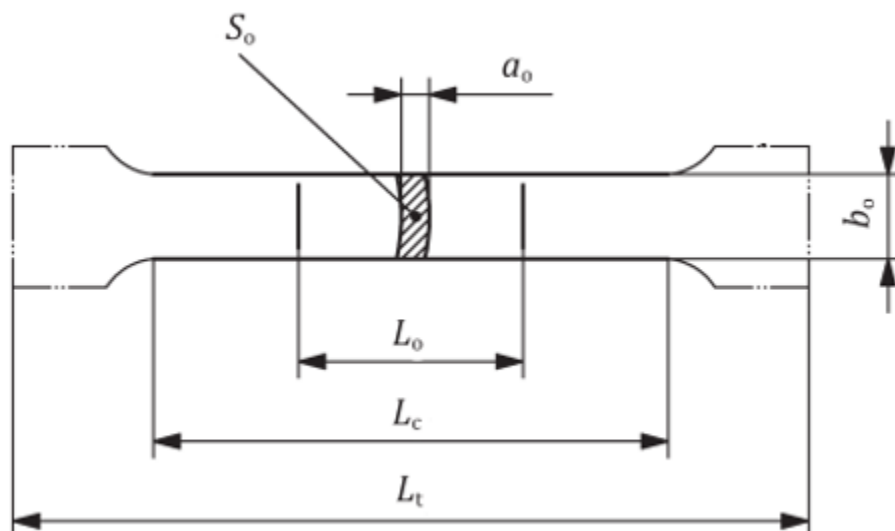
Współczynnik  $k$  we wzorze (1) przyjmuje wartości  $k=5,65$  dla próbki proporcjonalnej. Początkowa długość pomiarowa nie powinna być mniejsza niż 15 mm. Jeżeli przekrój poprzeczny próbki do badań jest za mały, aby wymaganie to zostało spełnione można przyjąć większą wartość współczynnika (zaleca się  $k=11,3$ ) albo zastosować nieproporcjonalną próbkę do badań.

Dla stali podstawowymi rodzajami próbek są próbki o przekroju:

- okrągłym,
- prostokątnym,
- pierścieniowym.

Parametry próbek o przekroju okrągłym i pierścieniowym zostały ujęte w normie PN-EN ISO 6892-1.

Próbkę o przekroju prostokątnym, która będzie wykorzystana w tym ćwiczeniu przedstawiono na rysunku 1.1.



Rysunek 1.1 Próbkę o przekroju prostokątnym.

Statyczna próba rozciągania wykonywana będzie na próbkach płaskich o grubości  $a_0 = 2 \text{ mm}$ , szerokości  $b_0 = 20 \text{ mm}$  i początkowej długości pomiarowej  $L_c = 80 \text{ mm}$ .

#### 1.4. Maszyna wytrzymałościowa

Statyczne próby rozciągania przeprowadzane są na maszynach wytrzymałościowych. Maszyna wytrzymałościowa musi spełniać szereg wymagań stawianych przez normę PN-EN ISO 6892-1.

Konstrukcja maszyny musi zapewnić m.in.:

- osiowe obciążenie próbki;
- kompensację wpływu temperatury;
- zwiększanie obciążenia od zera do maksymalnej wartości siły w sposób jednostajny, z płynną regulacją prędkości rozciągania, bez uderzeń i skoków;
- wskazania siłomierza z dużą dokładnością (np. dla maszyny klasy 1 wskazania siłomierza maszyny nie powinny się różnić więcej niż 1% wskazania siłomierza wzorcowego);

Warunki powyższe spełniają maszyny wytrzymałościowe o napędach hydraulicznym lub mechanicznym. Na rysunku 1.2 pokazano maszynę wytrzymałościową o napędzie mechanicznym. Próbkę umieszczona jest w uchwytych górnym 1 i dolnym 2 maszyny wytrzymałościowej. Belka 5 poruszana układem napędu, przemieszczana jest do góry. Uchwyt dolny pozostaje nieruchomy. Siła rozciągająca próbkę  $F$  działa również na tensometryczny przetwornik siły 4, który przekazuje sygnał elektryczny do układu rejestrującego 6. Przemieszczenie belki 5 jest także przekazywane do układu rejestrującego. W ten sposób można zarejestrować zależność siły od przemieszczenia belki. Sygnały te przekazywane są do komputera 7, w którym odpowiedni program umożliwia bezpośrednią obserwację wykresu rozciągania oraz wykonuje niezbędne obliczenia.

Ze względu na niezbędne luzy oraz odkształcanie się uchwytów i belki maszyny wytrzymałościowej, wydłużenie próbki nie jest równe przemieszczeniu belki 5. Błędy te eliminowane są przez przyrządy

zwane ekstensometrami. Ekstensometr 3 zakłada się bezpośrednio na część pomiarową próbki. Przyrząd ten ma ostrza oddalone od siebie o wielkość  $L_0$  zwaną bazą ekstensometru. Długość  $L_0$  jest początkową długością pomiarową próbki.

Zmiana długości bazy ekstensometru jest przetwarzana na sygnał elektryczny i przekazywana do komputera. Wraz ze wzrostem obciążenia, ostrza ekstensometru przymocowane do próbki przemieszczają się - wzrasta rzeczywista długość  $L_1$ . Przyrost wydłużenia  $\Delta L = L_1 - L_0$  jest przekazywany do komputera, a następnie przeliczany na **odkształcenie względne**  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0} \quad (2)$$

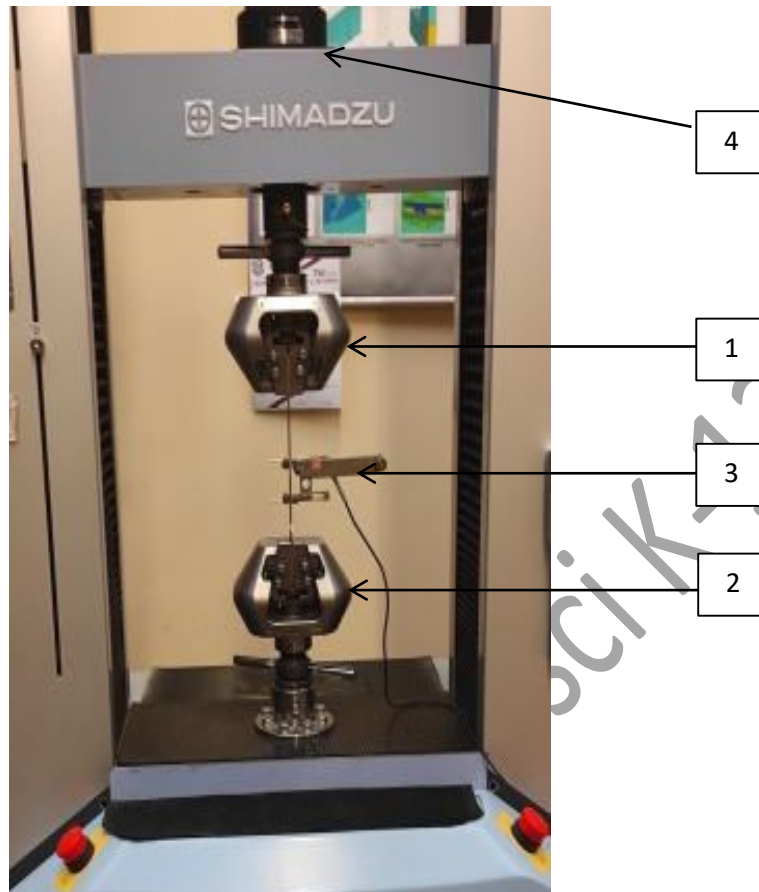
Siła obciążająca próbkę  $F$  przekazywana jest do komputera, a następnie przeliczana na **naprężenie normalne**  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (3)$$

gdzie  $S_0$  oznacza początkowe pole przekroju poprzecznego próbki.

Prędkość przesuwu belki 5 nie może być dowolna. Prędkość rozciągania ma wyraźny wpływ na wartości wyników próby rozciągania. Prędkości rozciągania zależne od rodzaju badanego materiału podaje ww. norma.

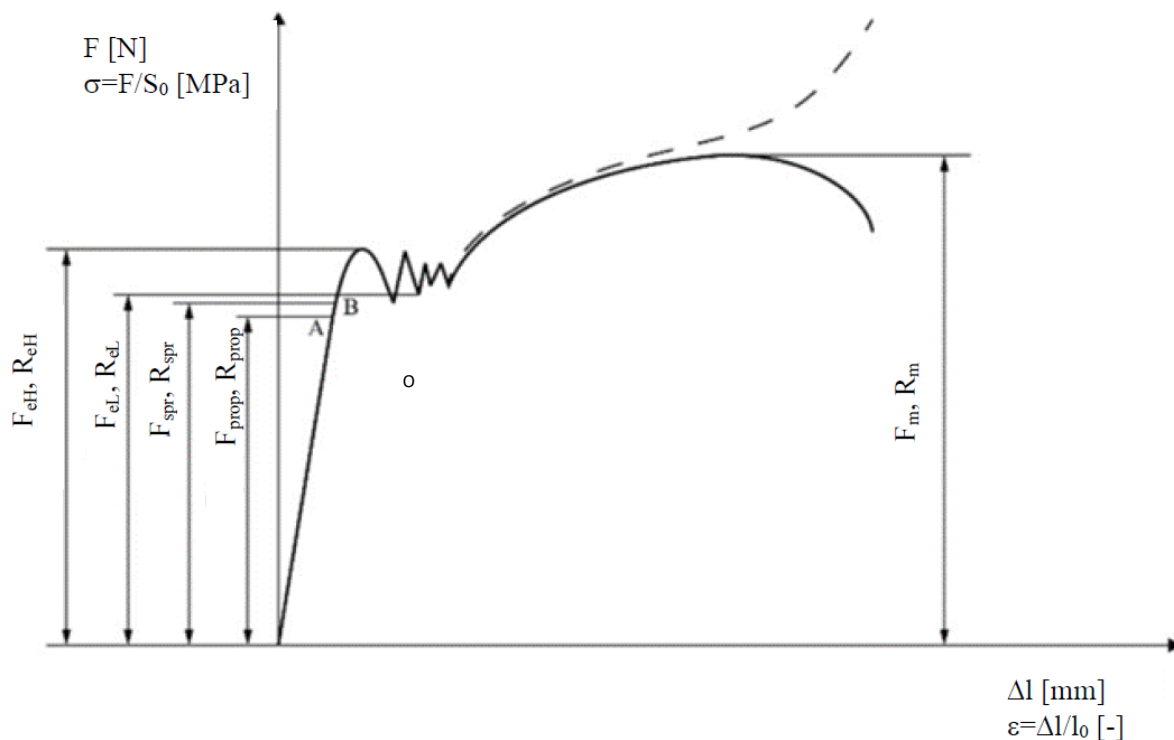




Rysunek 1.2 Maszyna wytrzymałościowa

### 1.5. Wykres rozciągania

Rejestrując siłę  $F$  oraz wydłużenie  $\Delta l$  możemy wykonać wykres siła  $F$  - wydłużenie próbki  $\Delta l$  lub naprężenie  $\sigma$  - odkształcenie  $\varepsilon$ . Kształt wykresu zależy od rodzaju materiału. Na rysunku 1.3 przedstawiono typowy wykres rozciągania stali niskowęglowej. Linia przerywana na rysunku ilustruje naprężenia rzeczywiste obliczone jako iloraz siły  $F$  przez pole przekroju w danym momencie próby.



Rysunek 1.3 Wykres rozciągania stali niskowęglowej

Na początku próby wydłużenie rośnie wprost proporcjonalnie do siły obciążającej (linia prosta od początku wykresu do siły  $F_{prop}$ ). Siły tej odpowiadają naprężenia zwane granicą proporcjonalności  $R_{prop}$ , czyli stosowalności prawa Hooke'a.

**Granica proporcjonalności  $R_{prop}$  (granica stosowalności prawa Hooke'a)** jest to taka graniczna wartość naprężenia, do której osiągnięcia przyrostom wydłużenia jednostkowego odpowiadają proporcjonalne przyrosty naprężeń czyli  $\Delta\sigma/\Delta\varepsilon = \text{const}$ . Oznacza to, że wykres rozciągania jest do momentu osiągnięcia granicy proporcjonalności linią prostą. Wartość ta jest więc z natury rzeczy wartością umowną. Obciążając, a następnie odciążając próbkę stwierdzamy, że na wykresie rozciągania będziemy się poruszali ciągle wzdłuż linii  $OA$ , jeżeli nie przekroczymy pewnej wartości naprężeń. Odkształcenie trwałe próbki wynosić będzie zero.

Wartość granicy proporcjonalności zależy więc od dokładności pomiaru i stwierdzenia, kiedy wykres rozciągania przestaje być linią prostą. Granica proporcjonalności określona jest wzorem:

$$R_{prop} = \frac{F_{prop}}{S_0} \quad (4)$$

Nieco wyżej znajduje się granica sprężystości. Gdyby przerwać próbę przy siły nie większej niż  $F_{spr}$  próbka praktycznie wróci do swoich pierwotnych wymiarów. Mówimy wówczas, że taki materiał jest sprężysty w zakresie naprężeń do  $\sigma_{spr}$ .



**Granica sprężystości  $R_{spr}$  jest to największa wartość naprężenia nie powodującego powstania w próbce odkształceń trwałych. Określona jest wzorem:**

$$R_{spr} = \frac{F_{spr}}{S_0} \quad (5)$$

Powyżej granicy sprężystości, na rysunku 1.3 widoczny jest wyraźnie wzrost wydłużenia próbki przy mniej więcej stałej wartości siły  $F_e$ . Punkt ten odpowiada wyraźnej granicy plastyczności  $R_e$ .

**Wyrażna granica plastyczności  $R_e$  to naprężenie odpowiadające osiągniętemu podczas próby punktowi, w którym następuje odkształcenie plastyczne praktycznie bez żadnego wzrostu siły.**

$$R_e = \frac{F_e}{S_0} \quad (6)$$

Ponadto możemy dokonać rozróżnienia pomiędzy górną granicą plastyczności  $R_{eH}$  i dolną granicą plastyczności  $R_{eL}$ .

**Górna granica plastyczności  $R_{eH}$  jest to maksymalna wartość naprężenia przed pierwszym spadkiem siły; określona wzorem:**

$$R_{eH} = \frac{F_{eH}}{S_0} \quad (7)$$

**Dolna granica plastyczności  $R_{eL}$  jest to najmniejsza wartość naprężenia podczas płynięcia plastycznego, (jeśli występuje więcej niż jedno minimum, pierwszego z nich nie bierze się pod uwagę – początkowy efekt przejściowy); określona wzorem:**

$$R_{eL} = \frac{F_{eL}}{S_0} \quad (8)$$

W momencie osiągnięcia granicy plastyczności na polerowanej powierzchni próbki zaobserwować można szereg linii przebiegających pod kątem  $45^\circ$  do osi próbki. Są to linie poślizgów cząstek materiału względem siebie, tzw. linie Lüdersa. Poślizgi te trwają pewien czas, po czym następuje wzmocnienie materiału. Przy dalszym wzroście siły obciążającej zachodzi znaczne wydłużenie próbki, przy czym widoczny jest wyraźny zanik proporcjonalności między siłą a wydłużeniem.

Po osiągnięciu wartości maksymalnej wartość siły spada. Największa siła  $F_m$ , jaka występuje w czasie próby, odpowiada **wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$** .

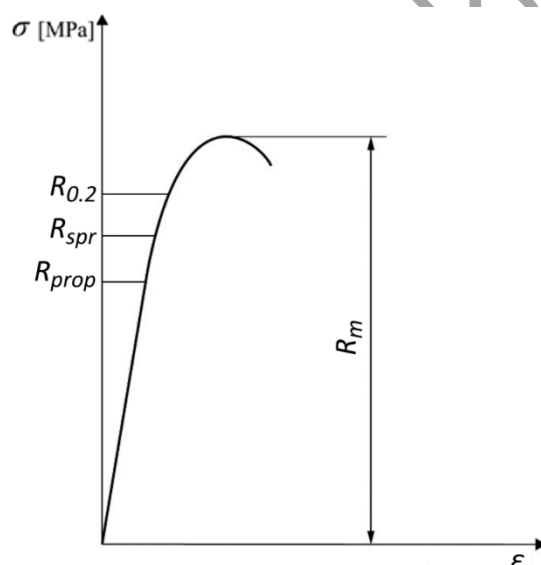
**Wytrzymałość na rozciąganie  $R_m$  jest to naprężenie odpowiadające największej sile zarejestrowanej w czasie badania, odniesionej do początkowego pola przekroju poprzecznego próbki.**

Określona jest wzorem:

$$R_m = \frac{F_m}{S_0} \quad (9)$$

Po przekroczeniu siły maksymalnej, przy dalszym wzroście wydłużenia, w najsłabszym miejscu próbka zaczyna się przewężać. Formuje się tzw. szyjka i próbka pęka.

Stale wysokowęglowe i materiały kruche nie mają wyraźnej granicy plastyczności. Wykres rozciągania takich materiałów przedstawia rysunek 1.4.



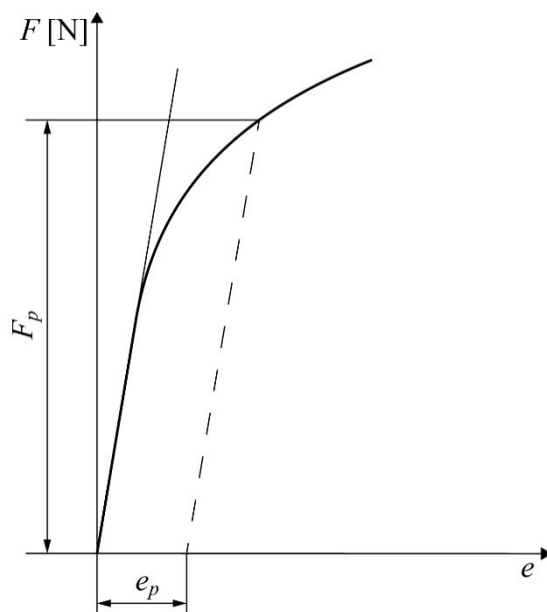
Rysunek 1.4. Wykres rozciągania stali wysokowęglowej

Dla materiałów, które nie wykazują wyraźnej granicy plastyczności wprowadzono pojęcie **umownej granicy plastyczności  $R_{p0.2}$** .

**Umowna granica plastyczności (wydłużenie ekstensometryczne plastyczne)  $R_{p0.2}$  to naprężenie, przy którym wydłużenie ekstensometryczne plastyczne jest równe określonemu procentowi długości pomiarowej ekstensometru  $L_e$ .** Symbol wielkości uzupełnia się wskaźnikiem, określającym procent, np.:

$$R_{p0.2} = \frac{F_{p0.2}}{S_0} \quad (10)$$

Umowna granica plastyczności wyznaczana jest z wykresu siła ( $F$ ) – wydłużenie ekstensometryczne ( $e$ ), na którym rysuje się linię prostą, równoległą do prostoliniowej części krzywej rozciągania, w odległości odpowiadającej umownemu procentowi wydłużenia ekstensometrycznego plastycznego ( $e_p$ ) (np. 0.2%). Rzędna punktu przecięcia prostej równoległej z krzywą rozciągania wyznacza siłę ( $F_{p0.2}$ ), odpowiadającą umownej granicy plastyczności przy wydłużeniu ekstensometrycznym plastycznym. Wartość umownej granicy plastyczności otrzymuje się dzieląc siłę przez początkowe pole przekroju poprzecznego próbki  $S_0$  (patrz rysunek 1.5).



Rysunek 1.5. Sposób wyznaczania umownej granicy plastyczności

## 1.6. Wyznaczanie modułu Younga

Poza wyżej wymienionymi wielkościami wykres rozciągania umożliwia obliczenie modułu sprężystości podłużnej  $E$  koniecznego do obliczania odkształceń konstrukcji.

**Moduł (współczynnik) sprężystości podłużnej  $E$ , zwany modułem Younga, jest to stosunek przyrostu naprężenia  $\sigma$  do odpowiadającego mu wydłużenia jednostkowego  $\varepsilon$ :**

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (11)$$

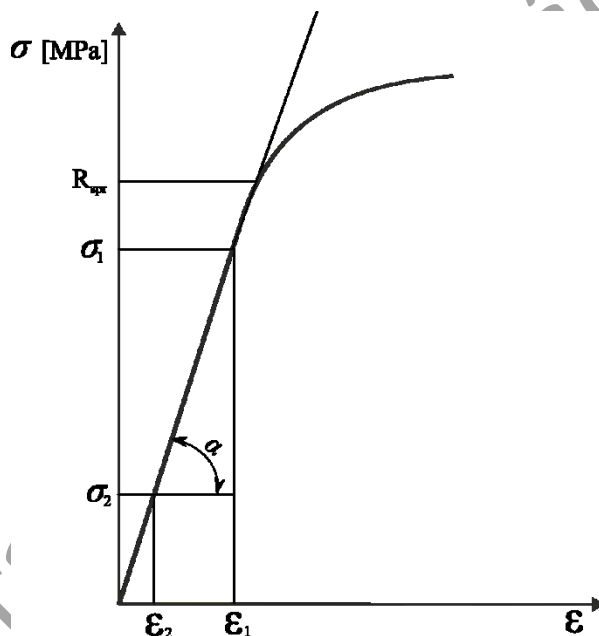
w zakresie wydłużeń sprężystych proporcjonalnych, czyli w zakresie, w którym krzywa rozciągania jest linią prostą (rysunek 1.6). Moduł Younga jest równy współczynnikowi kierunkowemu odcinka prostoliniowego wykresu rozciągania [ $\sigma = f(\varepsilon)$ ]; a więc co do wartości liczbowej równy jest tangensowi kąta  $\alpha$  a nachylenia liniowej części wykresu rozciągania:

$$E = \operatorname{tg}\alpha \quad (12)$$

Dla większości materiałów sprężysto-plastycznych, a w szczególności dla stali niskowęglowej, wykres rozciągania jest w początkowej fazie linią prostą. Moduł Younga wyznacza się wówczas zgodnie z podanym wyżej określeniem. W celu uniknięcia błędów występujących w początkowej fazie wykonywania próby rozciągania, moduł  $E$  wyznaczamy nie od wartości zerowej naprężeń i odkształceń, lecz między dwiema dowolnie przyjętymi wartościami naprężeń leżącymi na prostoliniowej części wykresu. Moduł Younga oblicza się więc (rysunek 1.6) według wzoru:

$$E = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{F_1 - F_2}{S_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (13)$$

gdzie:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  oznaczają odpowiednio: wartości sił rozciągających próbkę i odkształceń jednostkowych w górnym i dolnym punkcie pomiarowym, a  $S_0$  jest polem powierzchni pierwotnego przekroju poprzecznego próbki. Aby pomiar był dokładny, różnica pomiędzy siłami  $F_1$  i  $F_2$  powinna być możliwie duża.



Rysunek 1.6. Sposób wyznaczania modułu sprężystości

## 1.7. Wyznaczanie wydłużenia

Właściwości plastyczne materiału przy rozciąganiu można opisać za pomocą *wydłużenia procentowego przy rozerwaniu A* oraz *przewężenia procentowego przekroju Z*.

**Wydłużenie procentowe po rozerwaniu A** jest to trwałe wydłużenie części pomiarowej próbki po rozerwaniu wyrażone w procentach początkowej długości pomiarowej; wyrażone wzorem:

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100\% \quad (14)$$

gdzie:  $L_u$  [mm] – długość części pomiarowej po rozerwaniu;  $L_0$  [mm] – początkowa długość części pomiarowej próbki.

Wydłużenie procentowe po rozerwaniu wyznaczane jest na podstawie wskazań ekstensometru.

## 1.7. Przeprowadzenie pomiarów

Przed przystąpieniem do próby należy zmierzyć próbkę, a wartości  $a_0$ ,  $b_0$  wpisać do tablicy pomiarów. Pomiary przeprowadzane na maszynie wytrzymałościowej SHIMADZU.

1. Włączenie maszyny
  - 1.1 Włączyć maszynę SHIMADZU włącznikiem głównym (z prawej strony dołu maszyny).
  - 1.2 Włączyć komputer sterujący maszyną SHIMADZU – hasło do komputera: k12
  - 1.3 Włączyć drukarkę.

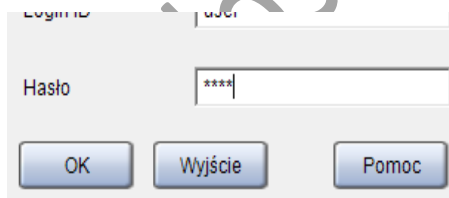
2. Przeprowadzenie badania dla próbki z wyraźną granicą plastyczności

- 2.1 Otworzyć program TRAPEZIUMX.



- 2.2 Wpisujemy: Login – user  
Hasło – user

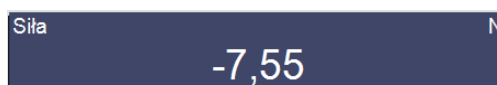
akceptujemy OK



- 2.3 Ponownie wybieramy metodę i test rozciągania. Wybieramy plik „Ćwiczenie 1 próbka płaska 1.xmak”, po wybraniu ćwiczenia wybieramy przycisk „Zakończ”

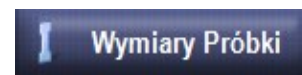


- 2.4 Przy otwartych szczękach (prawy przycisk myszki na wskaźniku siły)



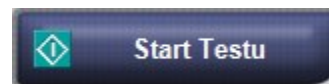
- Zerujemy siłę
- Kalibrujemy siłę.

- 2.5 Klikamy przycisk „Wymiary Próbkii”, mierzymy wymiary próbki i wprowadzamy je do programu, a następnie klikamy „Zakończ”.



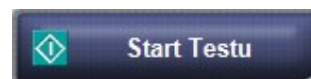
- 2.6 Na pilocie sterującym ustawiamy tryb manualny.
- 2.7 Mocujemy próbkę w dolnej szczęce, następnie przyciskiem sterującym trawersą ustawiamy górną szczękę w odpowiednim położeniu i chwytamy próbkę górną szczęką.
- 2.8 Na pilocie sterującym ustawiamy tryb automatyczny, wciskając przycisk „Manual”
- 2.9 Prowadzący instruuje jak włożyć ekstensometr na próbkę.
- 2.10 Zerujemy i kalibrujemy ekstensometr, klikając prawym przyciskiem myszy na przycisk „Ext. 1”

- 2.11 Uruchamiamy badanie przyciskiem START, sprawdzając czy ograniczniki znajdują się w odpowiednich pozycjach.



Po pojawieniu się komunikatu – „Zdjąć ekstensometr”, zdejmujemy ekstensometr, a następnie klikamy START.

- 2.12 Po zerwaniu próbki maszyna zatrzymuje się.
  - 2.13 Drukujemy raport.
  - 2.14 Wyjmujemy próbkę.
3. Przeprowadzenie badania dla próbki bez wyraźnej granicy plastyczności
    - 3.1 Wybieramy metodę i test rozciągania.  
Wybieramy plik „Ćwiczenie 1 próbka płaska 1.xmak ”,  
  
po wybraniu ćwiczenia wybieramy przycisk „Zakończ”
    - 3.2 Na pilocie sterującym ustawiamy tryb manualny.
    - 3.3 Mocujemy próbkę w dolnej szczękę, następnie przyciskiem sterującym trawersą ustawiamy górną szczękę w odpowiednim położeniu i chwytamy próbkę górną szczęką.
    - 3.4 Na pilocie sterującym ustawiamy tryb automatyczny.
    - 3.5 Wkładamy ekstensometr na próbkę.
    - 3.6 Uruchamiamy badanie przyciskiem START.
  - 3.7 Po pojawieniu się komunikatu – „Zdjąć ekstensometr”, zdejmujemy ekstensometr, a następnie klikamy START.
  - 3.8 Po zerwaniu próbki maszyna zatrzymuje się.
  - 3.9 Drukujemy jedną kopię raportu.
  - 3.10 Wyjmujemy próbkę z maszyny.
4. Zakończenie pracy maszyny
    - 4.1 Wyłączyć program TRAPEZIUMX „Ćwiczenie 1”.
    - 4.2 Wyłącznikiem głównym (z prawej strony dołu maszyny) wyłączamy maszynę.
    - 4.3 Wyłączamy komputer i drukarkę.



Po zakończeniu próby należy zmierzyć długości pomiarowe po zerwaniu: najmniejszą szerokość  $a_u$  i grubość próbki  $b_u$  (w miejscu zerwania );

W sprawozdaniu należy podać:

1. zastosowanie i cel próby ;
2. znaczenie symboli:  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_{p0.2}$
3. sposób obliczenia mierzonych wielkości (  $R_e$  ,  $R_m$  ,  $A$ ,  $E$ );
4. określenie modułu Younga;
5. wykresy rozciągania otrzymane podczas wykonywania próby;
6. wyniki pomiarów;
7. Obliczone wartości  $A$ .

## Ćwiczenie 2

### PRÓBA STATYCZNA ŚCISKANIA METALI

#### 2.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zbadanie właściwości wytrzymałościowych na ściskanie materiałów kruchych i plastycznych, jednorodnych i niejednorodnych, oraz zaznajomienie się z maszyną wytrzymałościową i aparaturą pomiarową używaną do tego typu badań. Wymieniona norma rozróżnia dwa rodzaje próby statycznej ściskania metali: próbę zwykłą i próbę ścisłą.

Celem próby statycznej zwykłej jest wyznaczenie:

- wyraźnej granicy plastyczności dla materiału plastycznego,
- wytrzymałości na ściskanie dla materiału kruchego,
- skrócenia względnego,
- wykresu ściskania.

Należy pamiętać, że wyraźną granicę plastyczności określa się jedynie dla tych materiałów plastycznych, a wytrzymałość na ściskanie - dla materiałów kruchych - to znaczy takich, które podczas próby ulegają zniszczeniu (rozkruszeniu). Umowną granicę plastyczności wyznacza się dla metali plastycznych, które nie wykazują wyraźnej granicy plastyczności.

Próbę statyczną ściskania nazywa się próbą ścisłą, jeżeli jej celem jest wyznaczenie:

- modułu sprężystości podłużnej przy ścisaniu  $E_c$ ,
- umownej granicy sprężystości  $R_{c 0.01}$ ,
- umownej granicy plastyczności  $R_{c 0.2}$ .

#### 2.2 Wprowadzenie

Do niedawna próba statyczna ściskania metali była kolejną, po próbie statycznej rozciągania metali próbą podstawową, mającą na celu określenie własności mechanicznych metali. Próba ta była przedmiotem normy PN-H-04320:1957 wraz ze zmianami podanymi w Informatorze PKN z 1982 r. Jednak w 2005 r. norma ta została odwołana i z nieznanymi przyczyn w chwili obecnej dla metali nie ma żadnej normy, która jednoznacznie określałaby sposób przeprowadzania pomiarów. Brak normy PKN nie oznacza, że dotychczasowa norma PN-H-04320:1957 nie precyzuje sposobu prowadzenia testu i do momentu pojawienia się aktualizacji zdaniem autorów jest dokumentem wystarczającym do prowadzenia badań. Stąd dalsze rozważania prowadzone będą w oparciu o normę wycofaną z użytku.

### 2.3 Określenia podstawowe

Za podstawę do określenia wyraźnej granicy plastyczności przy ściskaniu przyjmuje się te same właściwości materiałów, co przy wyznaczaniu wyraźnej granicy plastyczności podczas próby rozciągania. Należy wyznaczyć siłę, przy której próbka ulega skróceniu bez wzrostu obciążenia. Fakt ten uwidoczni się w charakterystycznym zatrzymaniu się wskazówki siłomierza lub zostanie zarejestrowany w postaci zagięcia krzywej ściskania na wykresie siła–skrócenie rejestrowanym przez maszynę wytrzymałościową. Wyraźna granica plastyczności przy ściskaniu charakteryzuje się znacznie krótszym odcinkiem płynięcia niż podczas próby rozciągania.

Wyraźną granicą plastyczności przy ściskaniu  $R_{plc}$  nazywamy naprężenie, przy którym występuje skrócenie próbki bez zwiększenia, a nawet przy nieznacznym zmniejszeniu się siły obciążającej (1):

$$R_{plc} = \frac{P_{plc}}{A_0} \quad (1)$$

gdzie  $P_{plc}$  [N] jest siłą odpowiadającą wyraźnej granicy plastyczności przy ściskaniu,  $A_0$  [mm<sup>2</sup>] – polem powierzchni pierwotnego przekroju poprzecznego próbki.

Ponieważ próbki z materiału plastycznego nie ulegają zniszczeniu (pęknięciu), najczęściej próbę przerywa się po przekroczeniu granicy plastyczności. Natomiast próbki z materiałów kruchych nie mają wyraźnej granicy plastyczności i podczas próby ulegają zniszczeniu. W tym przypadku notuje się wartość maksymalną siły  $P_c$ , która została zarejestrowana na wykresie siła–skrócenie. Najczęściej wartość ta koresponduje ze zniszczeniem próbki.

Naprężenie  $R_c$  otrzymane jako stosunek największej siły obciążającej  $P_c$ , powodującej zniszczenie (rozkruszenie lub pęknięcie) próbki, do pola powierzchni jej pierwotnego przekroju poprzecznego nazywamy wytrzymałością na ściskanie (2):

$$R_c = \frac{P_c}{A_0} \quad (2)$$

Stan odkształcenia próbki zarówno w obszarze sprężystym, jak i plastycznym charakteryzuje skrócenie względne  $a_c$  (3):

$$a_c = \frac{l_0 - l_1}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3)$$

gdzie  $l_0$  jest pierwotną długością pomiarową próbki, która może pokrywać się z wysokością próbki;  $l_1$  - długością pomiarową próbki po odkształceniu;  $\Delta l$  - skróceniem bezwzględnym.

Skrócenie względne może być także wyrażone w procentach (4):

$$a_c = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\% \quad (4)$$

Dla metali plastycznych niewykazujących wyraźnej granicy plastyczności wyznacza się umowną granicę plastyczności. Wartość umownej granicy plastyczności przy ściskaniu  $R_{c0.2}$  jest



naprężeniem określonym jako iloraz siły  $P_{c0.2}$ , która odpowiada trwałemu skróceniu próbki o 0,2% początkowej długości pomiarowej, przez pole powierzchni początkowego przekroju poprzecznego próbki (5):

$$R_{c0.2} = \frac{P_{c0.2}}{A_0}. \quad (5)$$

Przedstawione definicje  $R_{plc}$ ,  $R_{c0.2}$ ,  $R_c$ ,  $a_c$  odpowiadają wartościom bezwzględny, tzn. dodatnim. Współczynnik (moduł) sprężystości podłużnej  $E_c$  przy ściskaniu jest to stosunek naprężenia  $\sigma$  do odpowiadającego mu skrócenia jednostkowego  $\varepsilon$  (w zakresie odkształceń sprężystych) – (6):

$$E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Dla niektórych materiałów (np. żeliwo) wykres ściskania już prawie od samego początku ma charakter nieliniowy. Wówczas nie można więc mówić o stałym współczynniku sprężystości podłużnej przy ściskaniu. Dla celów praktycznych operuje się jednak średnią wartością współczynnika  $E_c$ .

## 2.4 Kształty, wymiary i wykonanie próbek

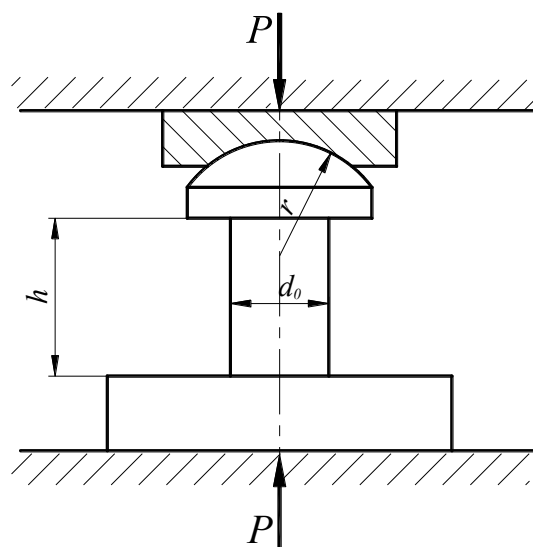
Do statycznej próby ściskania metali używa się próbek w kształcie walca. Średnica pierwotna próbki  $d_0$  (rys. 2.1) zależy od wymiarów i kształtu materiału, z którego pobrano odcinki prób oraz od maksymalnej siły ściskającej maszyny wytrzymałościowej. Dotychczasowa Polska Norma PN-H-04320:1957 zaleca stosowanie próbek średnicy 10, 20 lub 30 mm. Wysokość próbek  $h$  do próby statycznej zwykłej powinna wynosić  $h=1,5d_0$ . Wyznaczenie  $E_c$  oraz  $R_{c0.2}$  wymaga stosowania próbek o długości co najmniej trzykrotnie większej od średnicy pierwotnej. Od stosunku  $h/d_0$  zależy stan odkształcenia próbki. Wiąże się to ściśle z siłami tarcia, które powstają między powierzchniami czołowymi próbki a płytami maszyny wytrzymałościowej. Tarcie powoduje powstanie trójkierunkowego stanu naprężenia, który przejawia się w nierównomiernym odkształceniu próbki. Zalecana wysokość próbek  $h=3d_0$  do wyznaczenia  $R_{c0.2}$  a nawet  $h=10d_0$  przy określaniu  $E_c$  podyktowana jest wymiarami i możliwością ustawienia przyrządów pomiarowych. Znaczna długość umożliwia wytworzenie jednoosiowego stanu naprężenia przynajmniej w części środkowej próbki, ale jednocześnie stwarza niebezpieczeństwo wybożenia się próbki.

Stawiane są również pewne wymagania dotyczące wykonania próbek. Jednym z ważniejszych wymagań jest równoległość płaszczyzn czołowych (podstaw) oraz ich prostopadłość do osi próbki. Poza tym wszystkie powierzchnie próbek - szczególnie podstawy - powinny być dokładnie obrobione (zalecane jest szlifowanie tych powierzchni).

## 2.5 Maszyna wytrzymałościowa i przyrządy do pomiaru skróceń

Próby ściskania jest przeprowadzana na uniwersalnych maszynach wytrzymałościowych wyposażonych w czujnik siły i czujnik przemieszczenia trawersy wraz z układem zbierającym dane z pomiarów umożliwiającym prezentację wyników testu w czasie rzeczywistym. Powierzchnie płyt dociskowych powinny być polerowane i twardsze od badanych próbek. W przeciwnym razie wyniki prób ulegną zasadniczemu zniekształceniu na skutek plastycznego odkształcenia się płyt, które utrudnia rozszerzanie się próbki oraz wyklucza dalsze użytkowanie płyt. Jedna z płyt dociskowych powinna mieć

przegub kulisty, który eliminuje punktowy styk między płytą a podstawą próbki oraz ułatwia równomierne przyleganie.

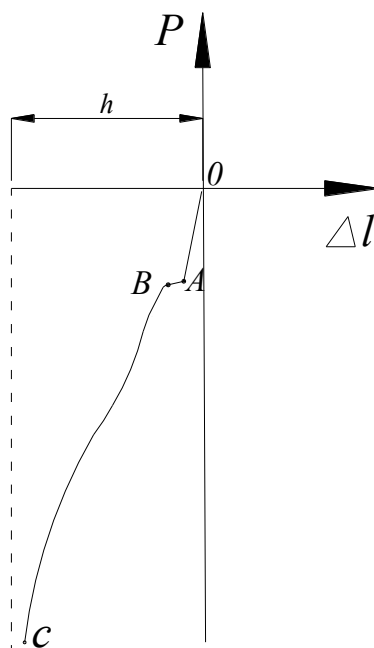


Rysunek 2.1. Prawidłowe ustawienie próbki między płytami dociskowymi.

Środek krzywizny czaszy przegubu kulistego powinien pokrywać się ze środkiem powierzchni styku z próbką. Płyty bez przegubu kulistego muszą mieć odpowiednie zamocowanie i prowadzenie zapewniające równoległość ich ustawienia podczas próby. Prawidłowe ustawienie próbki między płytami dociskowymi pokazano na rys. 2.1. Oś próbki powinna pokrywać się z osią obciążenia. Zazwyczaj nie ma możliwości osiowego prowadzenia próbki i aby zapewnić ściskanie osiowe, trzeba płyty dociskowe ustawić równoległe. Trzeba pamiętać również o ustawieniu płyty z przegubem kulistym, gdyż na skutek sił tarcia między kulistymi powierzchniami przegubu niewykluczona jest możliwość zukosowania się płyt. Dokładność wskazań siłomierza maszyny powinna wynosić przynajmniej  $\pm 1\%$ . Do pomiaru skrócenia względnego  $a_e$ , wystarczająca jest dokładność pomiaru taka, jak w czujnikach zegarowych, tzn. 0,01 mm.

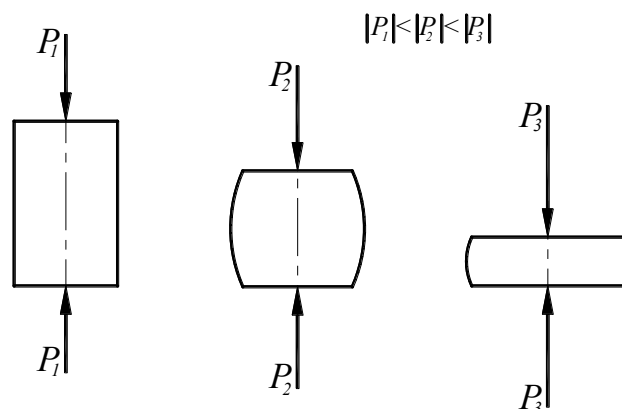
## 2.6 Ściskanie metali plastycznych

W początkowym okresie ściskania metalu plastycznego (aluminium, cynk, miedź, miękka stal) skrócenia próbki są proporcjonalne do naprężeń i podobnie jak przy rozciąganiu, występuje granica sprężystości i granica proporcjonalności. Na wykresie ściskania (rys. 2.2. mamy najpierw prostoliniowy odcinek  $OA$ , wyrażający liniową zależność między siłą a odkształceniem. Punkt  $A$  odpowiada sile, przy której pojawia się granica proporcjonalności materiału (w zastosowaniach technicznych utożsamia się ją często z granicą sprężystości).



Rysunek 2.2. Wykresie ściskania.

Po przekroczeniu granicy proporcjonalności na wykresie widać niewielki odcinek, gdzie wzrost deformacji jest szybszy. W pewnym momencie, dla materiałów mających wyraźną granicę plastyczności, zauważyć można zatrzymanie się wskazówki siłomierza, a nawet spadek siły obciążającej przy szybszym wzroście odkształcenia. Zjawisko to obserwować można na wykresie ściskania (punkt  $B$ ). Naprężenie odpowiadające punktowi  $B$  wykresu nazywamy wyraźną granicą plastyczności. Dla materiałów nie posiadających wyraźnej granicy plastyczności wyznacza się umowną granicę plastyczności na podstawie próby ścisłej. Siłę  $P_{c0.2}$ , która stanowi podstawę do określenia umownej granicy plastyczności, wyznacza się z wykresu  $P(\Delta l)$  sporządzonego na podstawie pomiaru skróceń lub określa się ją metodą kolejnego obciążania i odciążania próbki. Zwiększenie siły obciążającej po przekroczeniu granicy plastyczności powoduje coraz silniejsze pęcznienie próbki, objawiające się stałym wzrostem przekroju poprzecznego. Krzywa wykresu ściskania szybko zaczyna wzrastać i asymptotycznie dąży do prostej poprowadzonej równoległe do osi obciążeń, w punkcie odpowiadającym skróceniu równemu pierwotnej wysokości próbki.



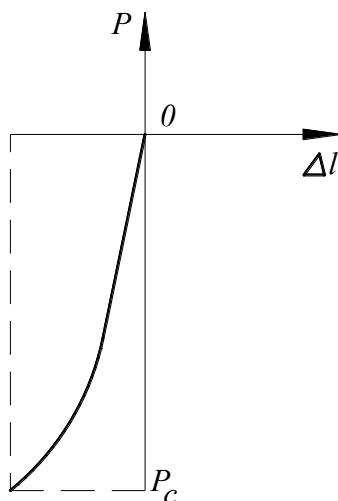
Rysunek 2.3. Niszczenie próbki.

Mimo widocznego spłaszczenia próbki nie widać na niej oznak zniszczenia (rys. 2.3 oraz 2.6b). Tylko w niektórych przypadkach (przy niedostatecznej plastyczności) na powierzchni bocznej próbki pojawiają się drobne rysy. Przyczyną tych pęknięć są często naprężenia rozciągające, a nie ściskające, które powstają wskutek przyjmowania przez próbkę kształtu beczkowatego. Pęknięcia te nie mogą być podstawą do oznaczenia wytrzymałości na ściskanie. Ponieważ próbki z metali plastycznych nie ulegają zniszczeniu (rozkruszeniu) to dla takich materiałów nie określa się wytrzymałości na ściskanie. Próbę ściskania metali plastycznych przerywa się najczęściej z powodu wyczerpania zakresu maszyny wytrzymałościowej.

## 2.7 Ściskanie metali kruchych

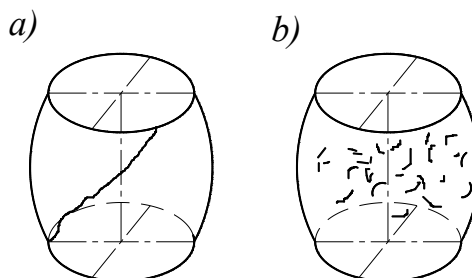
Próba ściskania żeliwa szarego opisana jest w normie PN-EN 13101:2005. Sposób przeprowadzenia próby jest w tym przypadku taki sam, jak opisany w pkt. 2.6. Wykres ściskania sporządzony przez urządzenie rejestrujące ma postać pokazaną na rys. 2.4. Początkowo wykres jest prawie prostoliniowy lekko odchylony od osi sił. Następnie coraz bardziej zakrzywia się, urywając się nagle w pewnym punkcie z powodu zniszczenia próbki. Kształt próbki bezpośrednio przed zniszczeniem jest lekko beczkowaty. Świadczy to o istnieniu niewielkich odkształceń plastycznych. Jednak materiały kruche (np. żeliwo) nie mają wyraźnej granicy plastyczności. Zniszczenie próbek z materiałów kruchych rozpoczyna się w ich podstawach. W przypadku kruszenia się części bocznych odsłaniają się nienaruszone części próbki w postaci stożków.

Większość metali i ich stopów doznaje podczas ściskania pęknięcia poślizgowego (ścięcia). Pęknięcie poślizgowe poprzedzone jest odkształceniami trwałymi wywołanymi naprężeniami stycznymi występującymi w przekrojach nachylonych pod kątem  $45^\circ$  do kierunków naprężeń głównych i zachodzi pod kątem zbliżonym do kąta nachylenia tych przekrojów.



Rysunek 2.4. Wykres ściskania.

Metalami wykazującymi pęknięcia poślizgowe jest m.in. mosiądz i żeliwo wyższej jakości. Niektóre metale i ich stopy ulegają podczas próby ściskania pęknięciu rozdzielczemu. Pęknięcie rozdzielcze zachodzi w przekrojach prostopadłych do kierunków głównych wydłużenia. Ponieważ największe wydłużenia próbki zachodzą w kierunku normalnym do tworzących, złom rozdzielczy przebiega wzdłuż tworzących. W rzadkich przypadkach w wyniku ściskania pojawia się złom kruchy, jak np. w próbkach ze stali hartowanych. Najczęściej obserwowane kierunki rys i pęknięć pokazano na rys. 2.5 oraz na rys. 2.6a.

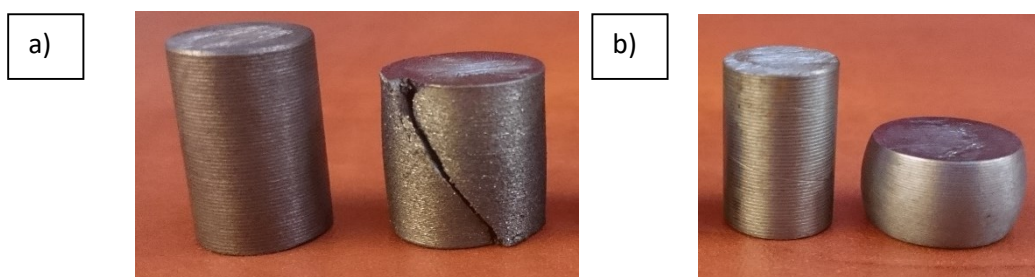


Rysunek 2.5. Kierunki rys i pęknięć w metalach i ich stopach.

Na podstawie próby ściskania metali kruchych otrzymuje się wartość obciążenia niszczącego próbkę, a zatem i wytrzymałość na ściskanie. Cechą charakterystyczną materiałów kruchych jest ich większa wrażliwość na rozciąganie niż na ściskanie, tzn. że:  $R_c > R_m$ . I tak na przykład:

- dla żeliwa  $R_c = (3 \div 4) R_m$ ,
- dla betonu  $R_c = (3 \div 10) R_m$ ,
- dla szkła  $R_c \approx 10 R_m$ .

Przy porównaniu wyników na ściskanie trzeba pamiętać, że wytrzymałość na ściskanie zależy od wymiarów próbek i dlatego możliwe jest porównywanie wyników badań otrzymanych na próbkach geometrycznie podobnych.



Rysunek 2.6. Kierunki rys i pęknięć w próbkach metalowych i stopach metali.

## 2.8 Przeprowadzenie próby

Przed przystąpieniem do wykonania próby trzeba dokonać pomiarów próbki. Średnicę próbki należy zmierzyć z dokładnością do 0,01 mm. Pomiary średnicy próbek krótkich przeprowadza się w jednym miejscu w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach i jako średnicę nominalną próbki przyjmuje się wartość średnią z dwóch pomiarów. Średnicę próbki dłuższej (do próby ściskowej) należy zmierzyć w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach w trzech miejscach na długości pomiarowej. Różnica między największą i najmniejszą średnicą na długości pomiarowej próbki nie może być większa od 0,05 mm. Pole powierzchni przekroju poprzecznego próbki oblicza się dla średnicy najmniejszej z dokładnością do  $\pm 0,3\%$ . Zmierzoną próbkę ustawia się na płycie dociskowej w sposób opisany w podrozdziale 2.5 i przykładu się stopniowo (statycznie) obciążenie z taką prędkością, aby przyrost naprężenia nie przekraczał 10 MPa/s. Oprogramowanie rejestrujące pomiar w trybie automatycznym generuje wykres ściskania w układzie współrzędnych: obciążenie  $P$  - (skrócenie)  $\Delta l$ , przy czym oś rzędnych jest osią obciążenia, a oś odciętych – skrócenia.

Na wyniki próby duży wpływ wywiera tarcie występujące na powierzchni próbki. Siły tarcia powodują hamowanie odkształcenia poprzecznego próbki przy jej podstawach i próbka przybiera kształt beczkowaty (baryłkowaty). Przy braku sił tarcia może wystąpić zarówno znaczne zmniejszenie wytrzymałości na ściskanie, jak i odmienna postać pęknięcia (pęknięcie podłużne). Dlatego też powierzchnie czołowe próbek i powierzchnie płyt dociskowych należy dokładnie oczyścić i odtłuścić.

W celu wykonania ćwiczenia należy postąpić następująco:

1. Sporządzić tablicę pomiarów (dla próby zwykłej według wzoru podanego w Tabeli 2.1, dla próby ściskowej jak w ćwiczeniu 1).
2. Zmierzyć próbki i zapisać ich wymiary w tabeli.
3. Przeprowadzić próbę.
4. Obliczyć właściwości wytrzymałościowe i plastyczne badanego materiału.

Uwaga: Podczas próby ściskania metali kruchych, zwłaszcza próbek hartowanych, należy zwrócić uwagę na zachowanie warunków bezpieczeństwa pracy, aby uchronić się przed skaleczeniem ostrym odpryskiem.

Tabela 2.1

Nr próbki / Sample no.	Próbka / Sample			Własności wytrzymałościowe / Strength properties				Własności plastyczne / Plastic properties		
	Oznaczenie / Denotation	Wymiary / Dimensions			$P_{plc}$ N	$R_{plc}$ MPa	$P_c$ N	$R_c$ MPa	$l_l$ mm	$a_c$ %
		$d_0$ mm	$l_0$ mm	$A_0$ mm						
1										
2										

## 2.9 Wykonanie sprawozdania

Z przeprowadzonej próby ściskania sporządza się sprawozdanie. W części opisowej sprawozdania należy podać:

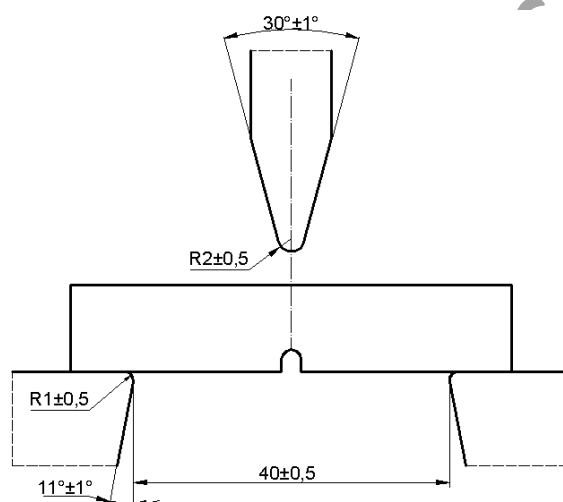
- 1) rodzaj materiału, z którego została wykonana próbka;
- 2) typ próbki (kształt i wymiary);
- 3) rodzaj maszyny wytrzymałościowej, na której przeprowadzono próbę,
- 4) zakres siłomierza;
- 5) cel próby;
- 6) oznaczenie podstawowych wielkości;
- 7) określenia podstawowe;
- 8) wykres ściskania;
- 9) tabelę z wynikami pomiarów;
- 10) charakterystyki złomów;
- 11) podsumowanie pomiarów.

### Ćwiczenie 3

#### PRÓBA UDARNOŚCI METALI

##### 3.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z próbą udarności stali, przeprowadzenie próby i określenie w dżulach energii zużytej na zniszczenie próbki. Próba udarności polega na zniszczeniu przy jednorazowym uderzeniu młotem próbki o wymiarach i kształcie z karbem (rysunek 3.1), w określonych warunkach zgodnych z obowiązującą normą Energia  $K$  potrzebna na złamanie, wyrażona w dżulach, jest miarą udarności próbki.



Rysunek 3.1. Próbka podparta na podporach przygotowana do badań.

W warunkach normatywnych dopuszczalne jest odniesienie energii zużytej na złamanie próbki  $K$  [J] do pola powierzchni przekroju poprzecznego próbki w miejscu karbu mierzonego przed próbą  $S_0$  [cm<sup>2</sup>]. Wielkość tę wyrażamy przez  $KC$  [1]:

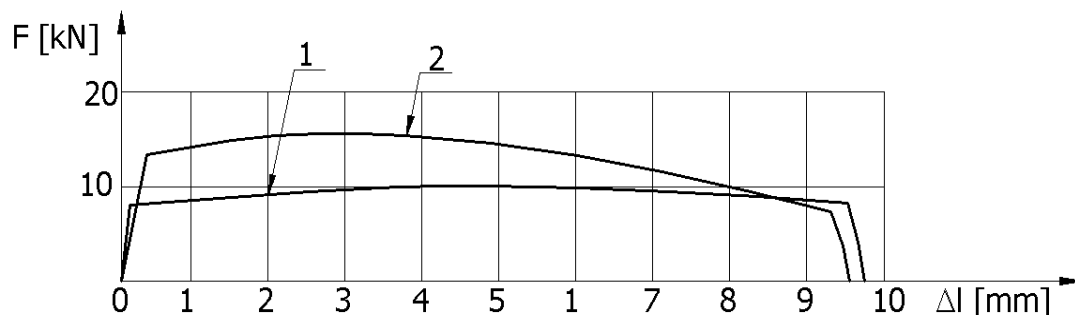
$$KC = \frac{K}{S_0} \quad (3.1)$$

i nazywamy udarnością próbki.



### 3.2. Wprowadzenie

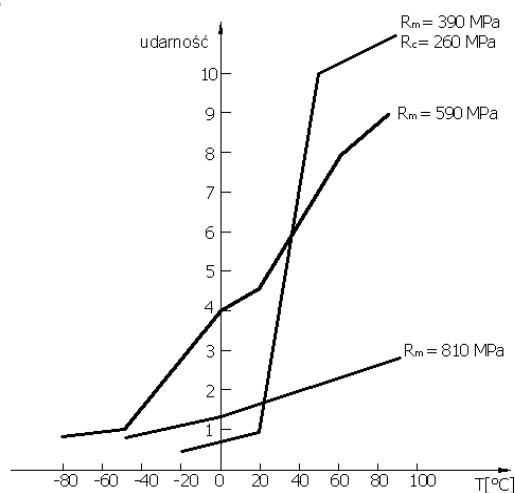
Materiały konstrukcyjne różnie reagują na obciążenia dynamiczne i statyczne, zmieniające się bardzo wolno - od zera do wartości maksymalnej. Zjawisko to jest szczególnie istotne w przypadku udarowego działania sił.



Rysunek 3.2. Statyczny i dynamiczny wykres rozciągania stali.

Na rysunku 3.2 przedstawiono statyczny (krzywa 1) i dynamiczny (krzywa 2) wykres rozciągania stali konstrukcyjnej zwykłej jakości. Cechą charakterystyczną jest podniesienie granicy plastyczności oraz przesunięcie maksimum krzywej w lewo. Następuje więc zmiana właściwości mechanicznych materiału, dlatego przy doborze materiału konstrukcyjnego na elementy obciążone dynamicznie często korzysta się z prób udarnościowych na rozciąganie, ściskanie, skręcanie oraz zginanie. Najczęściej stosowaną próbą jest udarnościowa próba na zginanie, która polega na poddaniu próbki materiału uderzeniu aż do momentu zniszczenia jej jednorazowym uderzeniem młota i pomiarze tej energii, która poszła na złamanie próbki. Główną korzyścią badań udarowych jest dokładniejsze określenie zmian własności wytrzymałościowych materiału poddanego procesom technologicznym w porównaniu z próbami statycznymi. Na przykład w przypadku określenia udarności blachy walcowej otrzymuje się różne wyniki w zależności od wyciętej próbki względem kierunku walcowania.

Zgniot zmniejsza udarność stali w temperaturze pokojowej w zależności od jego stopnia. Wzrost zawartości węgla w stalach podutektoidalnych gwałtownie zmniejsza udarność w temperaturze pokojowej zarówno w stanie wyżarzonym, normalizowanym jak i ulepszonym cieplnie. Odwęglanie powierzchni powoduje zwiększenie udarności, natomiast nawęglanie – jej zmniejszenie. Na ogół udarność zmniejsza się wraz ze spadkiem temperatury. Na rysunku 3.3 przedstawiono zależność udarności dla trzech gatunków stali.

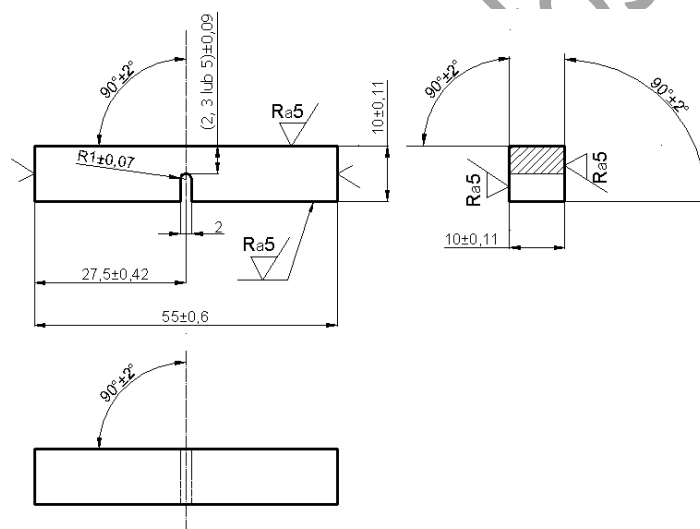


Rysunek 3.3. Statyczny i dynamiczna wykres rozciągania stali.

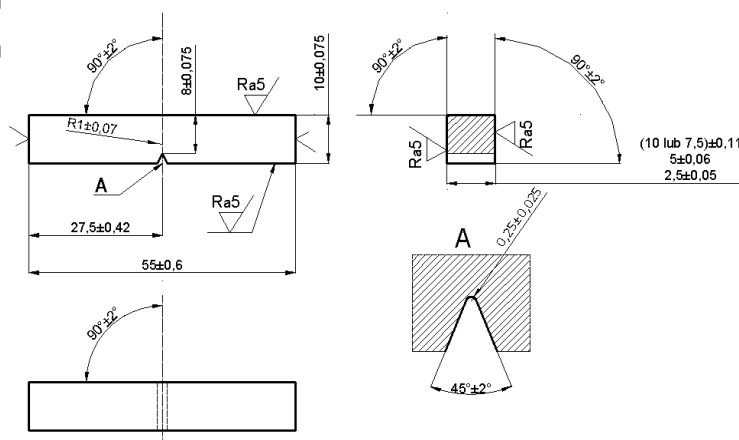
Wykresy te jasno pokazują, że spadek temperatury pracy konstrukcji powoduje spadek udarności i w konsekwencji powstanie kruchego złomu. Istotne jest, że spadek udarności może nastąpić w małym przedziale temperatur. Określenie więc udarności w temperaturze pokojowej nie określa w wystarczający sposób zachowania się materiału przy działaniu naprężeń dynamicznych. W celu pozyskania pełnej informacji należałoby zbudować dla własnego materiału pełną krzywą udarności jak ilustrują to krzywe na rysunku 3.3. Im bardziej krytyczny przedział temperatury (przedział gwałtownego spadku udarności) przesunięty jest w lewo, tym mniej czuły na działanie temperatur jest dany materiał i tym bardziej będzie niezawodny podczas pracy. Ponadto próba udarności łatwiej pozwala wykryć wady strukturalne powstałe w materiale na skutek nieprawidłowej obróbki cieplnej, niż próba statyczna badanie metali.

### 3.3. Próbki do próby udarności

Zgodnie z normą [1] próbę udarności wykonuje się sposobem Charpy'ego na próbkach z karbem U lub V. Zwymiarowane próbki zgodne z normą [1] zostały przedstawione na rysunkach 3.4 i 3.5. Jeśli z elementu nie można wyciąć próbek o szerokości  $b=10$  mm lub złamanie próbki wymaga większej energii niż 300 Nm, dopuszczalne jest zastosowanie próbki o szerokości 7,5 mm, 5 mm lub 2,5 mm. Miejsce, sposób pobrania oraz wymaganą liczbę próbek ustalają normy przedmiotowe na wyroby lub warunki techniczne.



Rysunek 3.4. Rysunek próbki z karbem U według normy [1].



Rysunek 3.5. Rysunek próbki z karbem V według normy [1].

Odcinki próbne, z których wykonujemy próbki, należy wycinać "na zimno" na obrabiarkach do skrawania metali. Należy unikać przy tym miejscowego nagrzania lub zgniotu, które mogłyby zmienić własności próbki. Dopuszczalne jest wycinanie odcinków próbnych za pomocą palnika acetylenowego lub nożyc, ale należy wówczas przewidzieć taki naddatek przeznaczony do usunięcia za pomocą obróbki wiórowej, aby mieć pewność, że właściwości materiału próbki nie uległy zmianie. Obróbka wszystkich próbek powinna być wyłącznie wiórowa. Próbki otrzymane z dokładanego odlewania mogą mieć dwie powierzchnie (prostopadłe do osi próbki) nieobrobione.

Karb wykonuje się za pomocą frezowania, dłutowania lub wiercenia i przecinania. Niedopuszczalne są na dnie karbu rysy wzdłużne widoczne nieuzbrojonym okiem, pochodzące od obróbki wiórowej. Promień zaokrąglenia i głębokość karbu mają bardzo znaczący wpływ na udarność próbki.

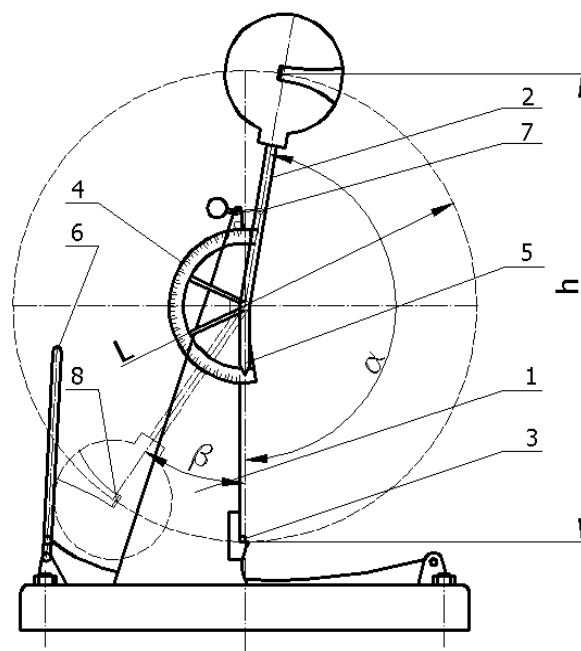
Wyniki prób udarności są porównywalne tylko dla próbek o jednakowym kształcie. Nacięcie karbu na próbce dokonuje się w celu wywołania spiętrzenia naprężeń powodującego pęknięcie próbki wykonanej z materiału plastycznego. Przeprowadzenie próby udarności próbki bez karbu wykonanej z takiego materiału byłoby w ogóle niemożliwe, ponieważ próbka uległaby tylko zgięciu.

Nie należy stosować do badań próbek skrzywionych i z pęknięciami hartowniczymi, próbek z wgniotami i zadziorami na krawędziach.

### 3.4. Budowa młota

Próbie udarności przeprowadza się na młotach wahadłowych typu Charpy'ego. Schemat i zasadę działania przedstawiono na rysunku 3.6, na którym poszczególne symbole oznaczają:

- 1 - podstawa młota,
- 2 - wahadło,
- 3 - próbka,
- 4 - skala energii,
- 5 - wskazówka,
- 6 - dźwignia hamulca,
- 7 - zaczepy dźwigni i trzpień blokujący,
- 8 - nóż udarowy lub bijak (element wahadła bezpośrednio uderzający w próbkę w chwili łamania),
- L - długość wahadła,
- $\alpha$  - kąt odchylenia wahadła przed jego zwolnieniem,
- h - wysokość spadania,
- $\beta$  - kąt odchylenia wahadła po złamaniu próbki.



Rysunek 3.6. Młot Charpy'ego.

Prędkość uderzenia noża w próbkę wynosi

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)} \approx \sqrt{2gh}, \quad (3.2)$$

gdzie  $v$  - prędkość uderzenia w [m/s],  $g$  - przyspieszenie ziemskie  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

Prędkość uderzenia noża w próbkę powinna wynosić  $v = (5 + 0,5) \text{ m/s}$ . Dla młotów starego typu może wynosić  $7 \text{ m/s}$ . Zasady przygotowania młotów wahadłowych do prób udarności jak również ich sprawdzanie objęte są normą [2].

### 3.5. Przeprowadzenie próby udarności

Próbie udarności należy przeprowadzić w temperaturze  $23^\circ \pm 5^\circ \text{C}$ . W celu wykonania ćwiczenia należy:

1. Zapoznać się dokładnie z normą [1].
2. Sprawdzić zgodność wymiarów próbki z wymogami normy oraz wyznaczyć w  $[\text{cm}^2]$  pole przekroju poprzecznego  $S_0$  próbki w miejscu karbu.
3. Umieścić wahadło 2 młota do położenia wyjściowego, a następnie zwolnić z zaczepu 7, sprawdzając czy po pełnym swobodnym wahnięciu wskazówka 5 wskaże 0 na skali 4 z dokładnością do 1 [J] (rys. 3.6).
4. Ułożyć próbkę na podporach przy delikatnie odchylonym wahadle młota. Przy układaniu próbki należy pamiętać o prawidłowym położeniu karbu (rys. 3.1), dosunięciu próbki do podpór oraz sprawdzeniu szablonem, czy oś karbu leży dokładnie w środku między podporami. Przesunięcie osi karbu powoduje otrzymanie udarności innej niż ją w rzeczywistości posiada badany materiał.
5. Unieść wahadło młota do położenia wyjściowego i zablokować w tym położeniu.
6. Zwolnić wahadło młota z zaczepów (opadające wahadło spowoduje złamanie próbki).
7. Odczytać na skali 4 wartość pracy w  $K$  [J] zużytej na złamanie próbki.
8. Dodatkowo obliczyć udarność próbki w oparciu o wzór

$$KC = \frac{K}{S_0} \quad (3.3)$$

W oparciu o normę [2], **oceniając udarność normatywnej próbki podaje się tylko jej pracę łamania  $K$** , stąd pełny zapis należy uzupełnić dodatkowymi oznaczeniami, które uwzględniają: typ badanej próbki, początkową energię w [J], głębokość karbu w [mm] oraz szerokość próbki w [mm].  
Zatem:

$KU_2$  – praca łamania próbki Charpy’ego z karbem U bijakiem o promieniu noża 2 [mm] przy początkowej energii młota 300 [J],

$KU_8$  – praca łamania próbki Charpy’ego z karbem U bijakiem o promieniu noża 8 [mm] przy początkowej energii młota 300 [J],

$KV_2$  – praca łamania próbki Charpy’ego z karbem V bijakiem o promieniu noża 2 [mm] przy początkowej energii młota 300 [J],

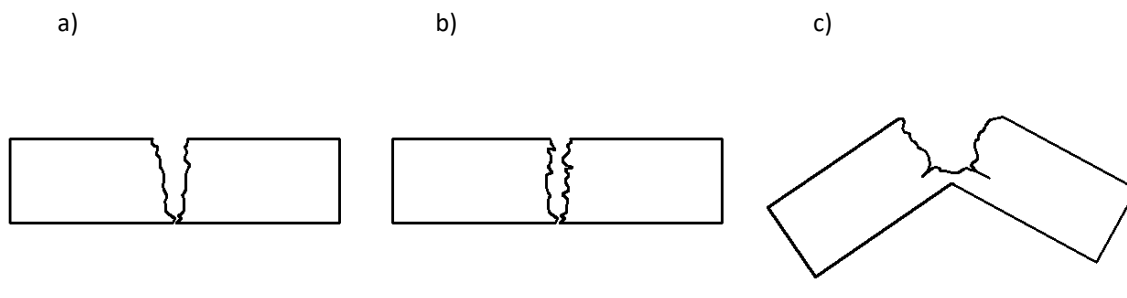
$KV_8$  – praca łamania próbki Charpy’ego z karbem V bijakiem o promieniu noża 8 [mm] przy początkowej energii młota 300 [J],

$KU_2 / 100 / 7,5$  – praca łamania próbki Charpy’ego o szerokości 7,5 [mm] z karbem U bijakiem o promieniu noża 2 [mm] przy początkowej energii młota 100 [J].

Dodatkowego oznaczenia udarności  $KC$  nie stosuje się w przypadku:

- młota o początkowej energii 300 [J],
- próbek o szerokości  $b=10$  mm i głębokości karbu 5 [mm] w kształcie litery U,
- próbek o szerokości  $b=10$  mm i głębokości karbu 2 [mm] z karbem w kształcie litery V.

9. Ocenić rodzaje powstałego złomu. W próbkach mogą wystąpić trzy rodzaje złomów:
- *poślizgowy* (rys. 3.7a) - próbka została zgięta, a pęknięcie nastąpiło po przekroczeniu granicy plastyczności, tj. już przy znacznych odkształceniach,
  - *kruchy* (rys.3.7b) - próbka pękła, nie ulegając odkształceniom plastycznym,
  - z *rozwarstwieniem* (rys.3.7c) - wskazuje to na duży stopień anizotropowości materiału spowodowanej (np. obróbką plastyczną) lub na obecność zanieczyszczeń.



Rysunek 3.7. Rodzaje złomów po próbie udarności.

### 3.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. cel ćwiczenia,
2. określenie miary udarności i definicję udarności,
3. rysunki próbek Charpy'ego U i V,
4. warunki pobierania i przygotowania próbek,
5. rysunek młota Charpy'ego,
6. wyprowadzenie wzoru na wartość na wartość zużytej na złamanie próbki (energii ochłoniętej):

$$K = GR(\cos\beta - \cos\alpha) \quad (3.4)$$

gdzie  $G$  [N] – ciężar wahadła młota zredukowany do środka powierzchni zetknięcia noża z próbką,  
 $R$  [m] – długość ramienia młota (odległość od osi obrotu wahadła młota do środka powierzchni zetknięcia noża wahadła z próbką ( $R = L$ ),  $\alpha$  - kąt uniesienia wahadła młota przed uderzeniem,  
 $\beta$  - kąt uniesienia wahadła młota po złamaniu próbki,

7. ocenę wyników próby i rodzaju złomów,
8. wyniki pomiarów (miarę udarności oraz udarność),
9. uwagi i podsumowanie.

Ocenę wyników próby przeprowadzamy według następujących kryteriów:

- a) Jeżeli przełom widziany od strony bocznej powierzchni próbki przedstawia linię łamaną lub wskazuje pęknięcie hartownicze, to próbę uważa się za nieważną i powtarza na jednej próbce zastępczej.
- b) Jeżeli próbka nie została złamana i po wygięciu „przeszła” przez podpory, należy zanotować w protokole „nie złamana” a otrzymaną wartość udarności należy ująć w nawias np. (147 J).
- c) Jeżeli próbka nie została złamana z powodu dużej udarności materiału i niewystarczającej energii uderzenia młota, należy w protokole umieścić uwagę „nie złamała się” i przed wartością udarności postawić znak „>”.

### Literatura

- [1] ISO 148-1:2009; Metallic materials - Charpy pendulum impact test - Part 1 - Test method.  
 [2] ISO 148-2:2009; Metallic materials - Charpy pendulum impact test - Part 1 - Verification of testing machine.

## Ćwiczenie 4

### PRÓBA TWARDOŚCI

#### 4.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest:

- poznanie wybranych metod badania twardości metali,
- nabycie umiejętności w określaniu twardości metali metodami *Brinella*, *Rockwella* i *Vickersa*,
- zapoznanie się z budową twardościomierzy używanych do pomiaru twardości wymienionymi metodami,

#### 4.2 Wprowadzenie

Twardość jest jedną z ważnych cech konstrukcyjnych materiałów. Właściwie dobrana twardość zapewni prawidłową pracę elementu, a w przypadku badań materiałowych jest tą cechą, która przy znanych własnościach plastycznych i wytrzymałościowych materiału ułatwia określenie przeprowadzonej obróbki cieplnej.

Do pomiaru twardości stosuje się metody statyczne i dynamiczne. Większość z nich opisana jest w Polskich Normach ale są również metody specjalne np. metoda zarysowania polegająca na zrobieniu rysy na polerowanej powierzchni stożkiem diamentowym.

W niniejszym ćwiczeniu przedstawione będą 3 statyczne metody badania twardości metali, znane jako:

- metoda Brinella
- metoda Rockwella
- metoda Vickersa

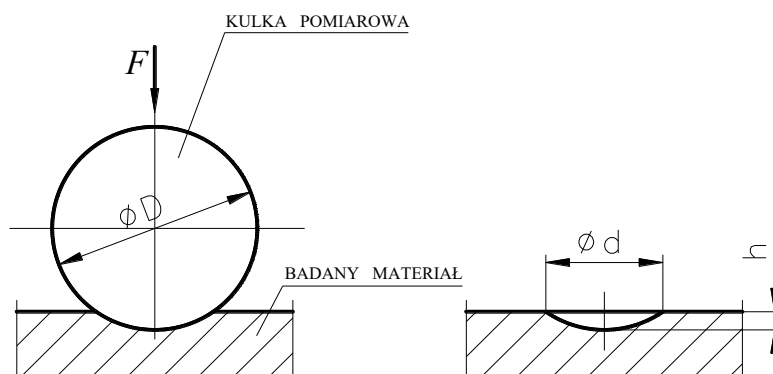
#### 4.3 Próba twardości metali metodą Brinella

##### 4.3.1 Określenie twardości metodą Brinella

Próba ta opisana jest m.in. w Polskiej Normie PN-EN ISO 6506-1. Metoda została opracowana i wprowadzona w 1900 roku przez Johana Augusta Brinella. Skala twardości Brinella jest oznaczana jako HB w zakresie od 0 do 650. Zazwyczaj jest stosowana w przypadku materiałów hutniczych. Pomiar

polega na wciśnięciu w materiał stalowej kulki lub kulki wykonanej z węglików spiekanych. W zależności od badanej próbki stosuje się różne średnice kulki, a także różne czasy trwania badania oraz różne siły docisku.

Twardość według *Brinella* jest to stosunek siły  $F$ , działającej prostopadle do badanej powierzchni i obciążającej stalową kulkę, do pola powierzchni odcisku  $S$ , jaki ta kulka zostawiła w badanym materiale (rys. 4.1). Pole powierzchni oblicza się mierząc średnicę trwałego odcisku przy założeniu, że ma ona kształt czaszy kulistej.



Rys. 4.1 Zasada pomiaru twardości metodą Brinella

Wartość twardości oblicza się ze wzoru:

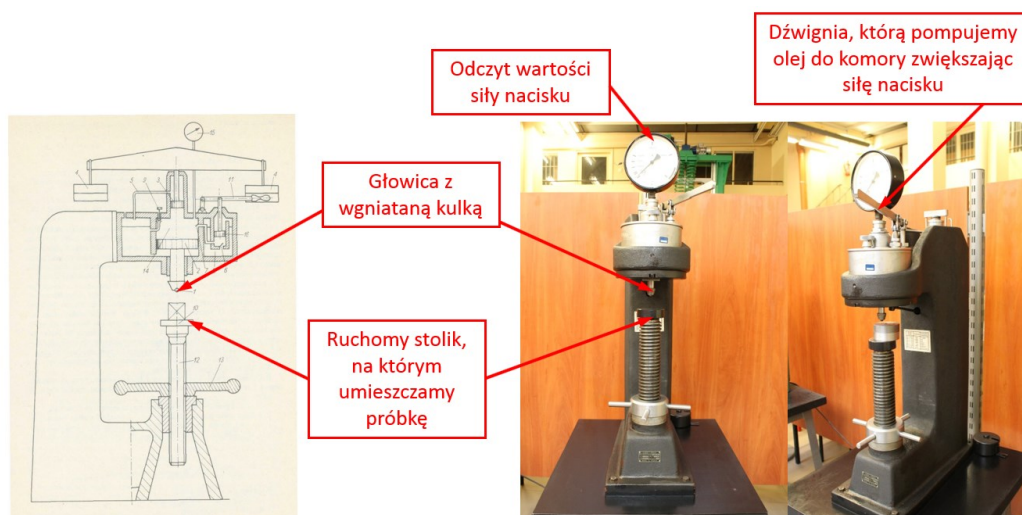
$$HB = 0.102 \frac{F}{S}, \quad (4.1)$$

gdzie  $F$  [N] jest siłą obciążającą kulkę,  $S$  jest polem powierzchni

czaszy kulistej:  $S = \frac{\pi}{2} D \left( D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)$  [mm<sup>2</sup>] (powierzchnią odcisku, jaki kulka zostawiła w badanym materiale),  $D$  [mm] – średnicą kulki,  $d$  [mm] – średnicą odcisku.

Rysunek 4.2 przedstawia schemat twardościomierza Brinella oraz jego wygląd rzeczywisty w laboratorium.





Rys. 4.2 Twardościomierz Brinella

#### 4.3.2. Warunki pomiaru – dobór parametrów

Do pomiaru twardości zaleca się stosowanie urządzeń, w których nacisk na kulkę pomiarową odbywa się w sposób hydrauliczny lub mechaniczny, zapewniających płynne zwiększanie wartości siły w całym zakresie pracy urządzenia.

Metodą Brinella można badać twardość metali do 650 HB z tym, że do twardości 450 HB mogą być używane kulki pomiarowe stalowe obrobione cieplnie, a do twardości 450 – 650 HB kulki z węglików spiekanych. Średnice stosowanych kulek pomiarowych wynoszą 10, 5, 2.5, 1. Średnica  $D$  [mm] kulki i siła obciążająca  $F$  zgodnie z wyżej wymienioną normą związane są zależnością:

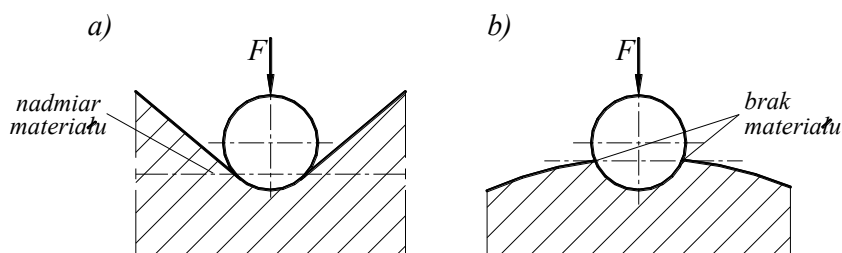
$$F = 9,8 KD^2[\text{N}], \quad (4.2)$$

Wartość  $K$  należy tak dobrać, aby średnica odcisku  $d$  mieściła się w zakresie  $(0,25 \div 0,6) D$ . Tablica 4.1 zawiera przykładowo wartości współczynnika  $K$  w zależności od rodzaju badanego materiału. Przy znanej wartości  $K$  i średnicy kulki  $D$  możemy określić ze wzoru (4.2) wymaganą wartość siły  $F$  obciążającej kulkę.

Tablica 4.1

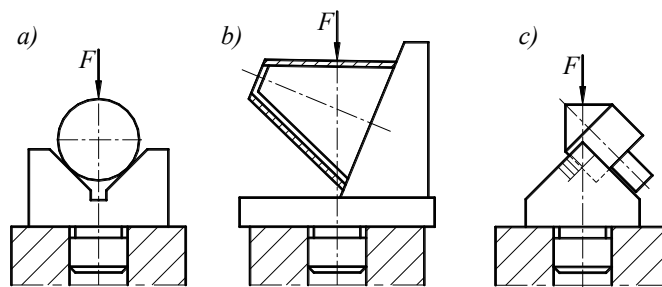
Rodzaj materiału	Stal żeliwo	Stopy miedzi o twardości 32 ÷ 200 HB i stopy aluminium o twardości powyżej 80 HB	Miedź o twardości poniżej 40 HB i stopy aluminium o twardości od 35 ÷ 80 HB	Stopy żelazkowe o twardości poniżej 20 HB
Współczynnik K	30	10	5	2,5
Średnica kulki [mm]	Siłą obciążająca [N]			
10	29420	9800	4900	2450
5	7355	2450	1225	613
2,5	1840	613	306,25	153,12

Próba twardości powinna być przeprowadzona wtedy, gdy przedmiot jest nieruchomy, a linia działania siły jest prostopadła do badanej powierzchni. Największą dokładność pomiaru otrzymujemy przy powierzchniach płaskich. Gdy badana powierzchnia nie jest płaska, wynik pomiaru jest obarczony błędem związanym z nadmiarem lub brakiem materiału w obszarze badanym. Tłumaczy to w sposób wyczerpujący rys. 4.3a oraz 4.3b.



Rys. 4.3 Powstawanie błęd pomiaru przy pomiarze twardości metodą Brinella w przypadku nadmiaru (a) i braku (b) materiału badanego.

W przypadku skomplikowanego kształtu przedmiotu należy stosować odpowiednie podpory. Na rysunku – 4.4 c, d i e przedstawiono przykładowo 3 podpory umożliwiające pomiary twardości wałka, cienkościennej powłoki stożkowej oraz pełnego stożka.



Rys. 4.4 Przykłady podpór do badania twardości metodą Brinella: wałka (a), powłoki stożkowej (b), pełnego stożka (c).

Ponieważ przy pomiarze twardości metodą *Brinella* działają siły powodujące duże odkształcenia materiału wokół odcisku, norma stawia także wymagania dotyczące grubości przedmiotu w miejscu pomiaru, jak i odległości między sąsiednimi odciskami, by każdy nowy pomiar był dokonywany poza strefą materiału zniekształconego poprzednimi odciskami. Grubość próbki powinna być taka, aby na powierzchni przeciwległej do odcisku nie powstało miejscowe odkształcenie. Grubość ta powinna być równa co najmniej 10-krotnej głębokości odcisku.

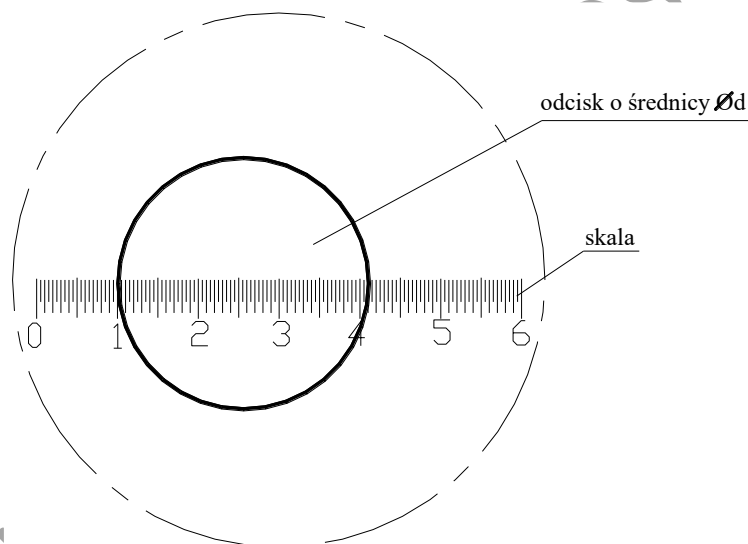
Przy twardościach powyżej 35 HB odległość między środkami dwóch sąsiednich odcisków powinna być większa niż  $4d$ , odległość zaś między środkiem odcisku a krawędzią badanego przedmiotu równa  $2,5d$ , gdzie  $d$  mm jest średnicą odcisku. Jeżeli twardość przedmiotu jest mniejsza od 35 HB, należy tę odległość odpowiednio zwiększyć do  $6d$  oraz  $3d$ .

Powierzchnia przedmiotu badanego w miejscu pomiaru powinna być wygładzona i oczyszczona ze zgorzeli i smaru itp. Przy wygładzaniu należy jednak wystrzegać się zmiany twardości przez nagrzanie albo zgniot. Dopuszcza się ślady obróbki mechanicznej, jeżeli nie wpływają one na dokładność pomiaru średnicy odcisku.

W związku z tym, że wynik pomiaru zależy od czasu zwiększenia obciążenia do maksymalnej jego wartości i od czasu trwania pełnego obciążenia, norma ustala, aby kulkę obciążać równomiernie do żądanej siły w ciągu 10 s, a czas działania całkowitej siły powinien wynosić np. dla stali i żeliwa od 10 do 60 s.

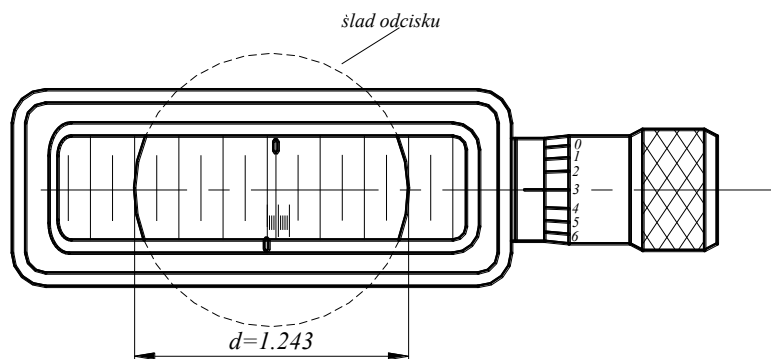
#### 4.3.3. Pomiar odcisku – urządzenia pomiarowe

Średnicę odcisku należy mierzyć w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach i przyjąć do obliczenia twardości wartość średnią. Do pomiaru średnicy odcisku służy wówczas specjalna lupa, tzw. lupa *Brinella*, z żaróweczką oświetlającą skalę. Za pomocą lupy możemy zmierzyć średnicę odcisku z dokładnością do 0,05 mm. Rysunek 4.5 przedstawia oglądaną przez okular lupy skalę oraz średnicę odcisku, która w tym przypadku wynosi  $d = 3,1$  mm.



Rys. 4.5 Pomiar średnicy odcisku za pomocą lupy Brinella.

W nowoczesnych aparatach *Brinella* (to samo dotyczy aparatów *Vickersa*) układ pomiarowy średnicy odcisku stanowi integralną część aparatu. Konstrukcja układu pomiarowego pozwala – bez zmiany położenia próbki, a tym samym odcisku – na pomiar jego średnic w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Ślad odcisku jest przenoszony – przez układ optyczny – w powiększeniu na ekran, na którym zaznaczone podziałki pozwalają na odczytanie średnicy odcisku z dokładnością do 0,01 mm. Sprężona z tymi skalami śruba mikrometryczna pozwala na zwiększenie dokładności odczytu do 0,001 mm (patrz rys. 4.6).



Rys. 4.6 Zasada odczytu średnicy odcisku za pomocą urządzenia pomiarowego sprzężonego z aparatem Brinella.

Na podstawie rys. 4.6 objaśniono zasadę odczytu średnicy odcisku wykonanego kulką o średnicy 2,5 mm przy obciążeniu siłą  $F = 1837,5 \text{ N}$  i przy powiększeniu widocznego na ekranie obrazu odcisku 10 razy.

- śląd odcisku obejmuje 12 dużych kresek, między którymi odległość wynosi 0,1 mm, a więc łącznie otrzymujemy 1,2 mm;
- kreska zerowa znajduje się za czwartą kreską skali wyznaczającej setne części milimetra (0,04 mm);
- trzecia kreska mikromierza pokrywa się z jego kreską zerową, a więc odczytujemy 0,003 mm. Średnica odcisku wynosi więc  $d = 1,243 \text{ mm}$ .

#### 4.3.4 Zapis pomiaru twardości

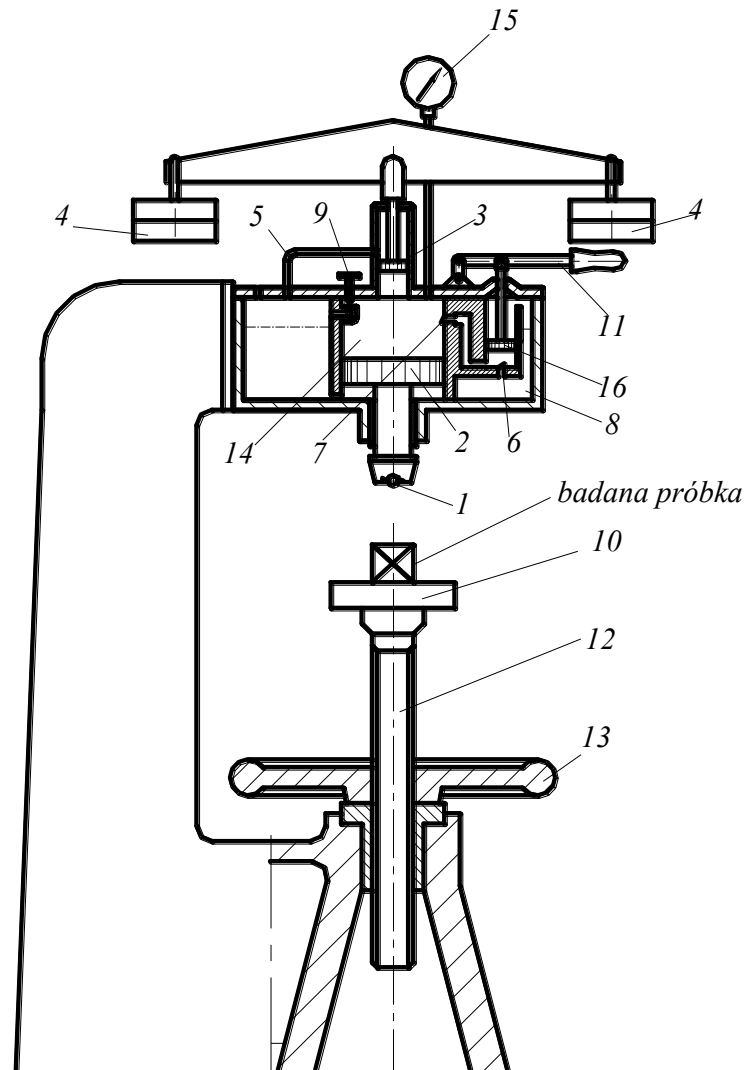
Twardość obliczoną według wzoru (4.1) zapisuje się bez dodatkowych, objaśnień, jeżeli pomiar był wykonany przy użyciu kulki o średnicy  $D = 10 \text{ mm}$ , sile nacisku  $F = 29400 \text{ N}$  i czasie trwania nacisku  $t = 10 \div 15 \text{ s}$ . Za liczbą określającą twardość należy postawić symbol HB (twardość *Brinella*), np. 510 HB. Są to tak zwane warunki standardowe.

Jeżeli warunki pomiaru były inne niż wyżej wymienione, wymagane jest podanie za symbolem HB warunków pomiaru, np. 601 HB 5/7355/30, co oznacza, że średnica kulki wynosiła 5 mm, siła obciążająca kulkę  $F = 7355 \text{ N}$ , a czas działania siły obciążającej  $t = 30 \text{ s}$ . Postawienie za symbolem twardości HB litery W ewentualnie S oznacza, że pomiar zrobiony był kulką z węglików spiekanych lub kulką stalową.

#### 4.3.5. Wykonanie pomiaru twardościomierzem *Brinella*

Rysunek 4.7 przedstawia najprostszy schemat twardościomierza *Brinella*. W celu wykonania pomiaru należy postąpić następująco:

1. Położyć badaną próbkę na stoliku *10* umocowanym na śrubie *12*.
  2. Przez pokręcenie pokrętle *13* podnieść stół tak, by docisnąć lekko badaną próbkę do kulki *1*; zamknąć zaworek spustowy *9*.
  3. Ruszając w górę i w dół dźwignią *11* pompować olej ze zbiornika *8* do komory *14* aż do uzyskania wymaganej wartości siły. Przy ruchu dźwigni *11* do góry, również do góry unosi się tłok *16* i olej przez zawór jednokierunkowy *6* zasany zostaje ze zbiornika oleju *B* do przestrzeni pod tłokiem *16*; przy ruchu tłoka *16* do dołu zamyka się zawór *6*, otwiera się zawór jednokierunkowy *7* i olej wtłaczany jest do komory *14*, z którą połączona jest końcówka manometru *15*. Wskutek pompowania oleju wzrasta jego ciśnienie w komorze *14*, a tym samym siła wciskająca kulkę *1* w badaną powierzchnię. Wartość siły równej iloczynowi ciśnienia oleju w komorze *14* i pola powierzchni tłoka dużego *2* można odczytać na manometrze *15* wycechowanym w skali sił. Wartość maksymalnej siły możliwej do uzyskania w czasie próby uzależniona jest ponadto od liczby obciążników *4* zawieszonych na dźwigni twardościomierza. W momencie osiągnięcia maksymalnej siły odpowiadającej zawieszonym obciążnikom dolna krawędź tłoczka *3* otwiera rurkę przelewową *5*, co powoduje wypływ oleju z komory *14* do zbiornika *8*, wywarcie więc większej siły nie jest możliwe.
  4. Odczekać wymagany normą czas.
  5. Odkręcić powoli zawór spustowy *9* łączący komorę *14* ze zbiornikiem oleju *8* i po zupełnym spadku ciśnienia siły obciążającej opuścić stół *10* i zdjąć próbkę.
  6. Wykonać pomiar średnicy wgniecenia za pomocą lupy z podziałką.
  7. Z dokonanego pomiaru średnicy obliczyć twardość według wzoru (4.1).
- U w a g a. Norma PN-91/H-04350 zawiera tablice pozwalające odczytać wartość  $H_B$ , jeśli się zna siłę obciążającą, średnicę kulki  $D$  i średnicę odcisku  $d$ .



Rys.4.7 Schemat aparatu Brinella

#### 4.3.6 Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) definicję twardości według *Brinella*,
- 2) opis działania aparatu *Brinella*,
- 3) warunki dokonywania pomiarów,
- 4) wyniki pomiarów.

## 4.4 Próba twardości metali metodą Rockwella

### 4.4.1. Wprowadzenie

Próba ta opisana jest m.in. w Polskiej Normie PN-EN ISO 6508-1. Metoda ta została opatentowana w 1914 roku przez Hugh M. Rockwella i Stanley'a P. Rockwella. Badanie twardości polega na pomiarze głębokości odcisku wykonanego stożkiem diamentowym o kącie wierzchołkowym 120 st. i promieniu zaokrąglenia 0,2 mm lub kulki węglkowej o średnicy szesnastej części cala ( $1/16'' = 1,5875$  mm), rzadziej o średnicy  $1/8''$ ,  $1/4''$  lub  $1/2''$ .

Próba twardości metodą Rockwella polega na dwustopniowym wciskaniu w badany materiał stożka diamentowego (skala A i C) lub kulki stalowej (skala B i F) o określonych wymiarach, a następnie na zmierzeniu trwałego przyrostu głębokości odcisku  $e$  [mm], który podzielony przez 0,002 jest podstawą do określenia twardości. Wartość 0,002 mm jest podstawową działką czujnika używanego do mierzenia zagłębienia wgłębnika.

Twardość w skali *Rockwella* określa się jako:

$$\begin{Bmatrix} HRC \\ HRA \\ HRB \\ HRF \end{Bmatrix} = K - e$$

(4.3)

gdzie  $K$  jest stałą wartością skali;

$e$  - trwałym przyrostem głębokości odcisku wyrażonym w jednostkach odkształcenia trwałego wynoszącego 0,002 mm;

HRA, HRC - twardością w skali Rockwella mierzoną stożkiem diamentowym; HRF, HRB — twardością w skali Rockwella mierzoną kulką stalową.



Tabela 2:

## Różne skale Rockwella

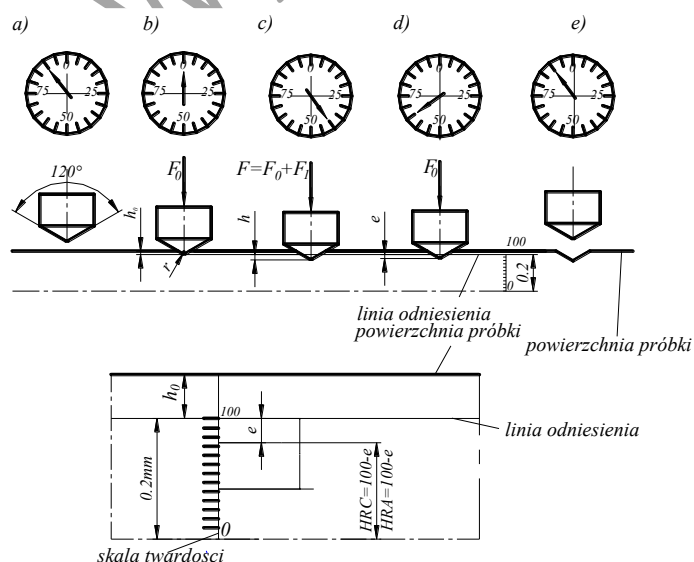
Skala	Oznaczenie	Obciążenie	Wgłębnik	Użycie
A	HRA	589 N (60kG)	diamantowy stożek 120°	
B	HRB	981 N (100 kG)	stalowa kulka 1/16 cala	aluminium, miedź i miękkie stale
C	HRC	1472 N (150 kG)	diamantowy stożek 120°	twarde stale
D	HRD	981 N (100 kG)	diamantowy stożek 120°	
E	HRE	981 N (100 kG)	stalowa kulka 1/8 cala	
F	HRF	589 N (60kG)	stalowa kulka 1/16 cala	
G	HRG	1472 N (150 kG)	stalowa kulka 1/16 cala	

## 4.4.2. Zasada pomiaru twardości stożkiem diamentowym (skala C)

Na rysunku 4.8 przedstawiono kolejne fazy wciskania stożka diamentowego. Pod działaniem obciążenia wstępnego  $F_0 = 98 \text{ N}$  stożek wgłębia się w badaną próbkę na głębokości  $h_0$  i na tym poziomie przyjmujemy linię odniesienia. Po przyłożeniu obciążenia głównego  $F_1 = 1373 \text{ N}$  dla skali C stożek diamentowy wciskany siłą  $F = F_0 + F_1$  zagłębia się – licząc od linii odniesienia – na głębokość  $h$ .

Po usunięciu obciążenia głównego  $F_1$  – na skutek własności sprężystych badanego materiału – zmniejsza się trwałe zagłębienie stożka diamentowego, które wynosi teraz  $e$  ( $0 < e < h$ , jeśli  $e = 0$ , to materiał jest idealnie sprężysty; jeżeli natomiast  $e = h$ , to materiał jest idealnie plastyczny).

Wynika stąd, że metoda *Rockwella* oparta jest na wykorzystaniu własności sprężystych materiału. Miarą twardości jest różnica pomiędzy tzw. stałą materiałową  $K$  (jest to wielkość umowna) a wielkością  $e$  wyrażoną w jednostkach odkształcenia trwałego równego 0,002 mm.



Rys. 4.8 Zasada pomiaru twardości metodą Rockwella przy użyciu stożka diamentowego.

Przy pomiarze twardości stożkiem diamentowym o kącie wierzchołkowym  $\alpha = 120^\circ$  przyjęto  $K = 100$ , co przy wspomnianej jednostce daje największą możliwą głębokość wnikania penetratora  $K \cdot 0,002 = 0,2$  mm. W związku z powyższym twardość w skali C wynosi  $HRC(HRA) = 100 - e$ . Dwustopniowe obciążenie wgłębnika potrzebne jest do zmniejszenia błędów pomiarów powodowanych niejednorodnością powierzchni.

U w a g a. Gdybyśmy przyjęli za wartość twardości bezpośrednie wskazania czujnika, to dla większych twardości (mniejsze zagłębienia) otrzymalibyśmy mniejsze wartości liczbowe twardości i odwrotnie. Dlatego (aby większym twardościom odpowiadały większe liczby) przyjęto, aby wielkość  $e$  odejmować od pewnej wartości  $K$  zależnej od rodzaju penetratora (wgłębnika).

#### 4.4.3 Zasada pomiaru twardości kulką stalową (skala B)

Do pomiaru używana jest wyłącznie kulka stalowa o średnicy  $D\left(\frac{1}{16}\right)'' = 1,5875$  [mm]. Zasada pomiaru jest taka sama jak stożkiem diamentowym, z tym że wartości obciążenia głównego  $F_1$  i stałej skali  $K$  są inne i wynoszą:  $F_1 = 883$  [N] a  $K=130$ . Twardość przy użyciu kulki stalowej określona jest zależnością:

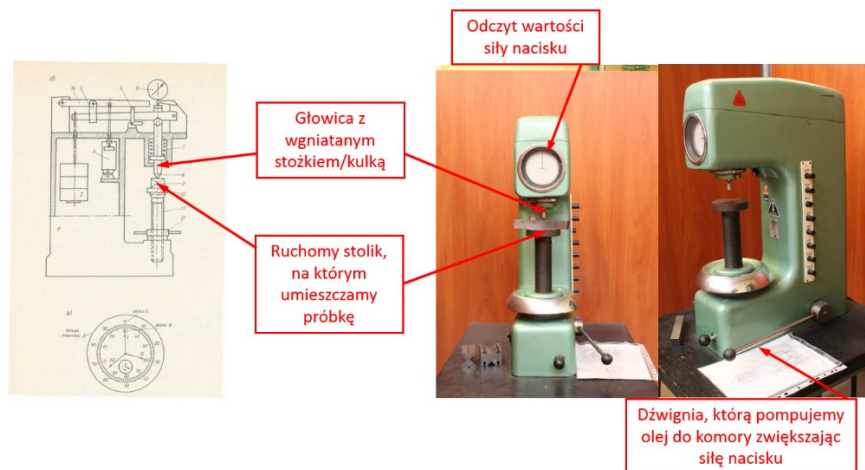
$$HRB = 130 - e.$$

Tłumaczy to w zupełności rys. 4.7

Należy podkreślić, że przy pomiarze twardości kulką stalową, przyjęciu  $K = 130$  i przy jednostce odkształcenia trwałego  $0,002$  mm otrzymujemy największą głębokość wnikania penetratora  $K \cdot 0,002 = 0,26$  mm większą niż w przypadku pomiaru stożkiem diamentowym. Zasada odczytu twardości na czujnikach, w które są wyposażone aparaty *Rockwella* omówiona będzie dokładnie w pkt. 4.4.5.

#### 4.4.4. Zasadnicze warunki pomiaru

Rysunek 4.9 przedstawia schemat twardościomierza Rockwella oraz jego wygląd rzeczywisty w laboratorium.



Rys. 4.9 Twardościomierz Rockwella.

Próbkę twardości metodą *Rockwella* przy użyciu stożka diamentowego stosuje się do stali węglowych i stopowych w stanie zahartowanym i ulepszonym cieplnie oraz do innych stopów o twardości  $20 \div 70$  HRC, natomiast próbkę twardości *Rockwella* przy użyciu kulki – do stali węglowych i stopowych w stanie zmięczonym lub normalizowanym oraz do stopów metali nieżelaznych o twardości  $20 \div 100$  HRB. Do wykonania pomiaru stosuje się urządzenia zapewniające dwustopniowe wciskanie wgłębnika w materiał, tak aby obciążenie główne wzrastało w ciągu  $2 \div 8$  s. Czas, po którym należy zdjąć obciążenie główne, dla różnych przypadków odkształcenia plastycznego jest regulowany dokładnie normą PN – 91/H – 04355. Czas ten nie powinien być krótszy niż 2 s, licząc od zakończenia się wgłębienia penetratora. Czujnik powinien umożliwić dokonanie odczytu z dokładnością do 0,5 jednostki skali, co odpowiada 0,001 mm wgłębienia. Tarcza czujnika powinna umożliwić ustawienie jej w położeniu początkowym.

Stożek diamentowy jest stożkiem prostym o podstawie kołowej, kącie wierzchołkowym  $120^\circ \pm 0,35^\circ$ , i promieniu zaokrąglenia wierzchołka 0,2 mm. Kulka wykonana jest ze stali ulepszonej cieplnie i powinna mieć twardość nie mniejszą niż 850 HV i średnicę  $1,5875 \text{ mm} \pm 0,003 \text{ mm}$ . Powierzchnia badanej próbki nie powinna wykazywać wad powierzchniowych i powinna być polerowana. Odległość środków sąsiednich odcisków jak również odległość środka odcisku do krawędzi próbki powinna wynosić co najmniej 3 mm. Zgodnie z normą grubość badanej warstwy materiału lub próbki powinna być nie mniejsza niż 10-krotna wielkość trwałego przyrostu głębokości odcisku.

Głębokość odcisku można obliczać ze wzorów:

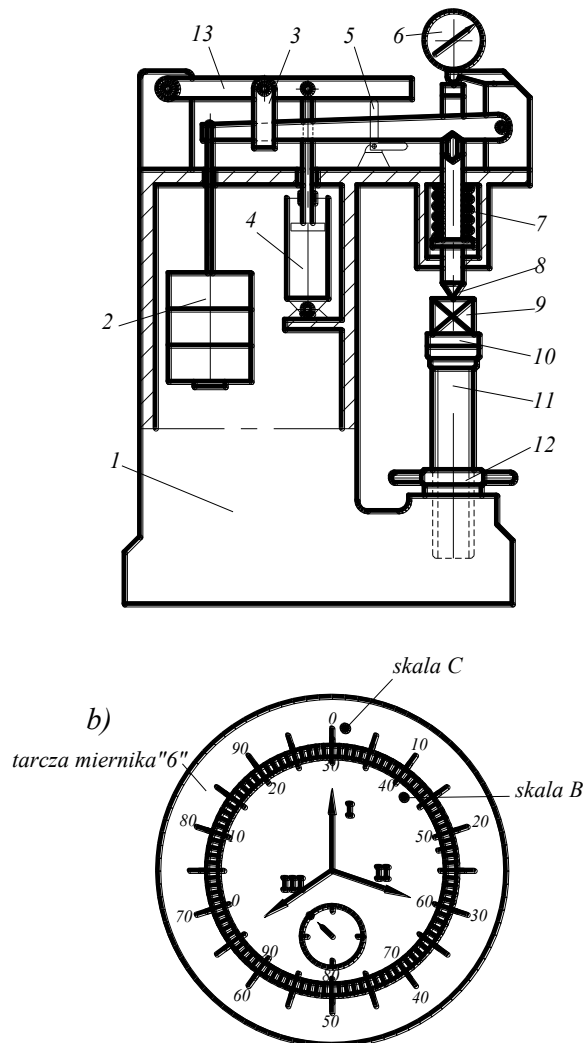
$$e = 0,002 (100 - \text{HRC}) \text{ w przypadku stożka,}$$

$$e = 0,002 (130 - \text{HRB}) \text{ w przypadku kulki}$$

lub z odpowiedniego wykresu bądź tablicy zawartych w normie PN – 91/H – 04355.

## 4.4.5. Wykonanie pomiaru twardościomierzem Rockwella

Na rys. 4.10a przedstawiono schemat twardościomierza *Rockwella*, a na rys. 4.10b skalę miernika (czujnika).



Rys. 4.10 Schemat aparatu Rockwella

W celu wykonania pomiaru należy postąpić następująco:

1. Sprawdzić prawidłowość działania dźwigni 5 włączającej obciążenie główne,
2. Położyć próbkę 9 na stoliku 10 śruby 11, a następnie pokręcając pokrętkiem 12 podnieść próbkę aż do zetknięcia się z wgłębnikiem 8,
3. Obracając pokrętkiem 12 docisnąć tak wgłębnik do próbki, aby sprężyna 7 oddziaływała na wgłębnik siłą  $F_0 = 98 \text{ N}$ . Odpowiada to ustawieniu małej wskazówki czujnika na wyróżnionym punkcie

lub cyfrze małej skali tarczy miernika 6 – patrz rys. 4.8b. Duża wskazówka powinna się wówczas ustawić w górnym pionowym położeniu,

4. Przez pokręcenie tarczy miernika 6 ustawić 0 na odpowiedniej skali (A lub C). W omawianym przypadku duża wskazówka ustawiła się na cyfrze 0 skali C,

5. Włączyć obciążenie główne  $F_1$ , przesuając powolnym ruchem w dół dźwignię 5. Duża wskazówka wykonuje wówczas obrót w kierunku trygonometrycznym, zajmując przykładowo położenie II zaznaczone na rys. 4.8b,

6. Po zatrzymaniu dźwigni 13 (czas potrzebny do osiągnięcia wartości obciążenia głównego  $F_1$  od momentu opuszczenia dźwigni 5 zależy od amortyzatora 4) przesunąć dźwignię 5 w położenie początkowe. Na tarczy miernika 6 wskazówka z położenia II przesuwa się w położenie III. Odczytujemy na skali C twardość 65 HRC (patrz rys. 4.8).

Jak widać z powyższego opisu, pomiar twardości metodą *Rockwella* jest bardzo zautomatyzowany.

7. Wykonać co najmniej 3 pomiary,

Ponadto na rys. 4.8a 1- oznacza korpus, 2 – obciążniki, 3 – wyłącznik.

#### 4.4.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) definicję twardości według *Rockwella*,
- 2) zasady pomiaru twardości *Rockwella* przy użyciu stożka i kulki,
- 3) opis działania aparatu *Rockwella*,
- 4) warunki pomiarów,
- 5) wyniki pomiarów.

### 4.5 Próba twardości metali metodą Vickersa

#### 4.5.1. Wprowadzenie

Próba ta opisana jest m.in. w Polskiej Normie PN-EN ISO 6507-1. Jest to najnowsza, z prezentowanych tutaj, metoda. Stosuje się ją od 1924 roku. Skala twardości Vickersa jest oznaczana symbolem HV, po którym podaje się wartość zastosowanego obciążenia wyrażonego w jednostkach

siły. Pomiar jest wykonywany za pomocą foremnego, czworobocznego ostrosłupa, wykonanego z diamentu, którego kąt wierzchołkowy wynosi 136 stopni.

Twardość *Vickersa* wyraża się stosunkiem siły  $F$  obciążającej wgłębnik do pola powierzchni  $S$  poboczniczy odcisku wgłębnika. Wgłębnikiem jest prawidłowy ostrosłup diamentowy o podstawie kwadratowej i kącie  $\alpha = 136^\circ$  między przeciwległymi ścianami, natomiast wartość siły wciskającej wgłębnik, działającej prostopadle do powierzchni próbki przez określony czas  $t$ , wynosi od 9,8 N do 980 N. Po dokonaniu pomiaru mierzy się długości przekątnych  $d_1$  i  $d_2$  powstałego odcisku przyjmując do dalszych obliczeń wartość średnią:

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2},$$

(patrz rys. 4.11)

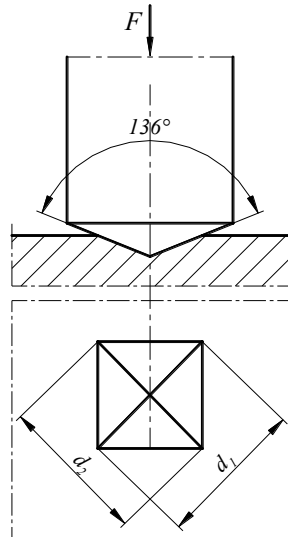
Wartość twardości *Vickersa* oblicza się ze wzoru:

$$HV = \frac{F}{S}, \quad (4.4)$$

gdzie  $F$  N jest wartością siły obciążającej wgłębnik,  $S = \frac{d^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$  mm<sup>2</sup> – polem powierzchni bocznej odcisku,  $d$  [mm] – średnią arytmetyczną obu przekątnych odcisku,  $\alpha$  – kątem między przeciwległymi ścianami wgłębnika.

Po podstawieniu powyższych wartości do wzoru (4.4) otrzymujemy następujące wyrażenia pozwalające określić twardość *Vickersa*:

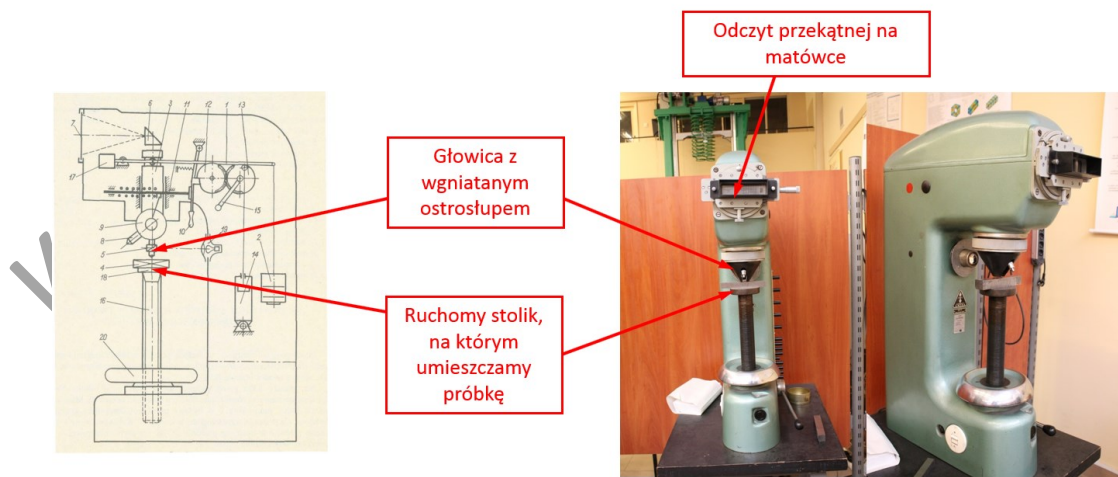
$$HV = \frac{0,102 \cdot 2F \sin \frac{136^\circ}{2}}{d^2} = 0,189 \frac{F}{d^2}, \quad (4.5)$$



Rys. 4.11 Zasada pomiaru twardości metoda Vickersa

#### 4.5.2 Warunki pomiaru

Rysunek 4.12 przedstawia schemat twardościomierza Vickersa oraz jego wygląd rzeczywisty w laboratorium.



Rys. 4.12 Twardościomierz Vickersa

Opis próby twardości metali sposobem *Vickersa* zawarty jest w normie PN-91/H-04360. Do pomiaru używa się ostrosłupa diamentowego o kącie między przeciwległymi ścianami równym  $136^\circ \pm 0,5'$ . Wierzchołek ostrosłupa powinien być ostro zakończony, a ściany wypolerowane i bez wad powierzchniowych. Powierzchnia badanego przedmiotu w miejscu pomiaru powinna być płaska, gładka, wolna od zgorzeliny i innych zanieczyszczeń; przy wygładzaniu należy wystrzegać się zmiany twardości na powierzchni przez nagrzanie lub zgmiot. Dopuszcza się ślady obróbki mechanicznej, jeżeli nie wpływają one na dokładność pomiaru przekątnej odcisku.

Grubość badanego przedmiotu w miejscu pomiaru powinna być równa co najmniej 1,5 przekątnej odcisku. W przypadku grubości zbliżonej do dopuszczalnej należy sprawdzić po wykonaniu pomiaru, czy po stronie przeciwległej nie ma śladów odkształceń. Jeśli są, pomiar należy unieważnić. W przypadku badania warstwy utwardzonej wyniki są tylko wtedy ważne, jeżeli warstwa ta nie została przebita, wgnieciona w bardzo miękkie podłoże lub jeżeli nie pękła.

Z obciążeń używanych do pomiaru należy wybrać największe, tak jednak, aby zachować warunki podane wyżej. Obciążeniem zalecanym jest obciążenie równe 294 N. Stosowane są również inne obciążenia, jak wspomniano wyżej, wynoszące od 9,8 N do 980 N, zależnie od rodzaju materiału.

Przy wykonywaniu kilku pomiarów twardości powierzchni należy zachować taką odległość między poszczególnymi odciskami, aby mieć pewność, że nie dokonano pomiaru w obszarze zniekształconym poprzednim pomiarem. Norma ustala, że odległość między środkiem odcisku a brzegiem próbki lub brzegiem sąsiedniego odcisku powinna wynosić co najmniej 2,5 przekątnej odcisku. Wgłębnik należy obciążać bez wstrząsów, równomiernie do żądanej siły w czasie około 15 s, a czas działania całkowitej siły obciążającej powinien wynosić  $10 \div 15$  s. Należy pamiętać, że do obliczania twardości służy ich średnia arytmetyczna, a różnica długości przekątnych tego samego odcisku nie może przekraczać 2% długości większej przekątnej.

Zapis twardości *Vickersa* składa się z liczby określającej jej wartość, symbolu twardości oraz liczb określających warunki pomiaru. I tak na przykład, 223 HV-/35 oznacza 223 stopnie twardości *Vickersa* przy obciążeniu 294 N trwającym 35 s; 224 HV 10/30 oznacza 224 stopnie twardości *Vickersa* przy obciążeniu 90 N i czasie trwania pomiaru 30 s; 545 HV 10 oznacza twardość 545 stopni twardości w skali *Vickersa* przy nacisku 90 N i czasie pomiaru  $10 \div 15$  s.

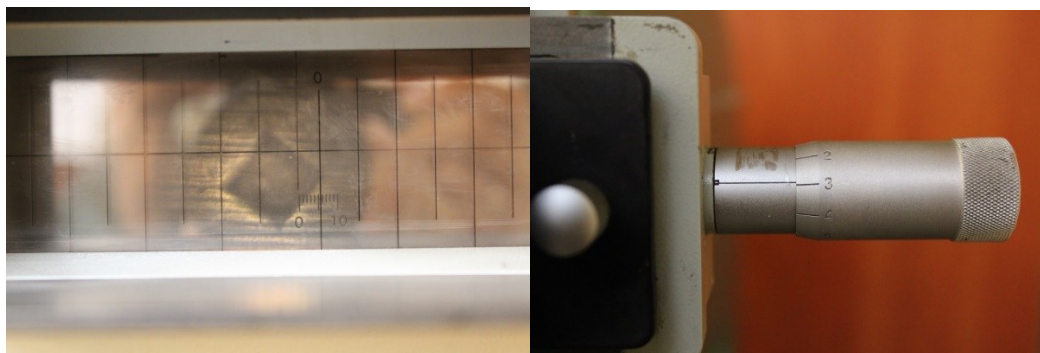
Nie podaje się dodatkowych oznaczeń siły i czasu pomiaru, gdy  $F = 294$  N, a czas  $t = 10 \div 15$  s. Oznaczenie np. 600 HV oznacza twardość metalu w skali *Vickersa* dokonanej przy sile nacisku 294 N i czasie pomiaru  $10 \div 15$  s. Twardość powyżej 50 HV należy podawać z dokładnością nie mniejszą od 1 jednostki. Przy twardościach poniżej 50 HV dokładność podania wyniku nie powinna być mniejsza od 0,1 jednostki.

#### 4.5.3. Urządzenie pomiarowe

Ze względu na powstające przy próbie *Vickersa* bardzo małe odciski – długości przekątnych  $d_1$  oraz  $d_2$  są rzędu dziesiątych części milimetra – urządzenie do pomiaru ich długości musi zapewnić bardzo dużą dokładność pomiaru. Jego zasady reguluje norma PN-91/H-04360. Opis urządzenia pomiarowego i zasady odczytu podano w punkcie 4.5.4. oraz na rys. 4.14



W nowoczesnych aparatach Vickersa optyczny układ pomiarowy stanowi integralną część aparatu. Na matówce - w powiększeniu - widoczny jest ślad odcisku, a ruchome skale: dziesiątych i setnych części milimetra wraz ze sprzężoną z nimi śrubą mikrometryczną pozwalają na precyzyjny pomiar przekątnej odcisku z dokładnością do  $\pm 0,001$  mm.



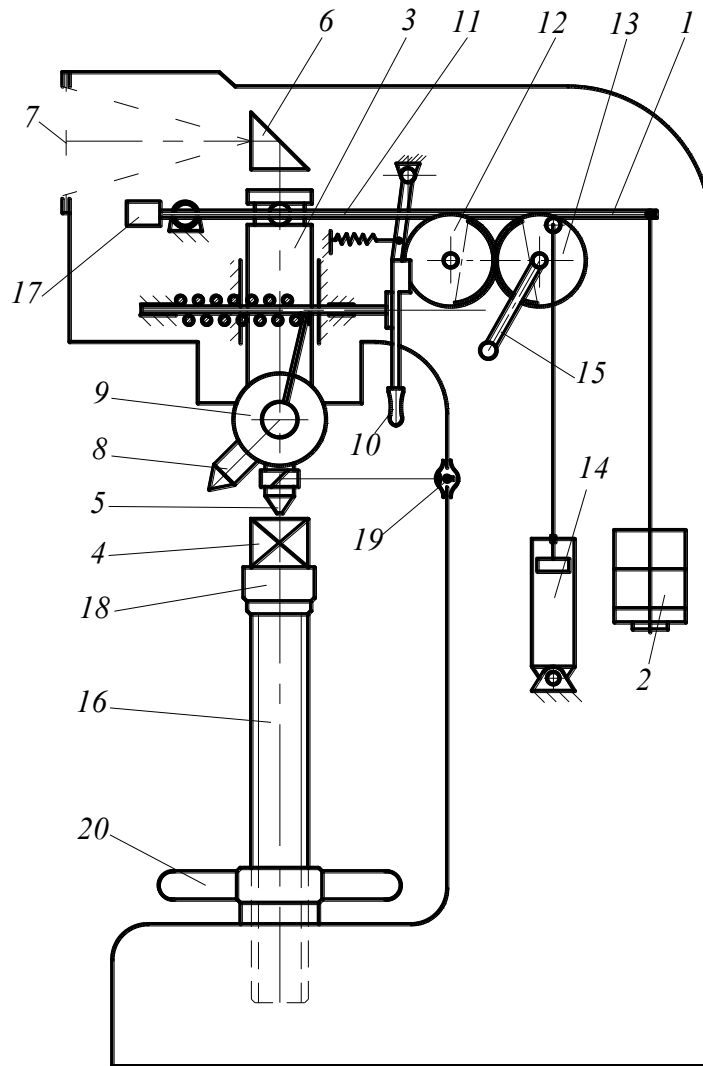
Rys. 4.13 Optyczny układ aparatu sprzężony ze śrubą mikrometryczną.

#### 4.5.4. Opis aparatu Vickersa i wykonanie pomiaru

Schemat aparatu przedstawiono na rys. 4.14, przy czym przyjęto następujące oznaczenia: 1 – dźwignia obciążnikowa z przeciwcieżarem, 2 – obciążniki, 3 – trzpień mierniczy, 4 – próbka, 5 – obiektyw, 6 – pryzmat, 7 – matówka, 8 – wgłębnik, 9 – przegub, 10 – dźwignia zwalniająca, 11 – popychacz włącznika, 12 – zapadka, 13 – tarcza regulatora olejowego, 14 – regulator olejowy, 15 – dźwignia wyłącznika, 16 – śruba, 17 – przeciwcieżar, 18 – stolik, 19 – źródło światła, 20 – pokrętło.

Ażeby wykonać pomiar, należy postąpić następująco:

1. Położyć próbkę 4 na stoliku 18 umocowanym na śrubie 16I,
2. Włączyć oświetlenie 19,
3. Pokrętłem 20 podnieść stolik z próbką tak, aby na matówce 7 był wyraźny obraz powierzchni próbki,
4. Przesunąć dźwignię zwalniająca 10, w tym momencie wgłębnik 8 ustawia się na linii działania siły obciążającej i włączone jest obciążenie,
5. Po dojściu dźwigni wyłącznika 15 do położenia końcowego przestawić ją z powrotem w położenie początkowe. Wtedy obiektyw 5 ustawia się na linii optycznej i na matówce widzimy obraz odcisku.
6. Zmierzyć przekątne,
7. Odczytać wartość twardości z tablic lub obliczyć ze wzoru (4.5),
8. Wykonać co najmniej 3 pomiary.



Rys. 4.14. Schemat aparatu Vickersa.

#### 4.5.5. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) definicję twardości *Vickersa*,
- 2) opis działania aparatu podczas próby,
- 3) warunki dokonywania pomiarów,
- 4) wyniki pomiarów.

#### 4.6 Ważniejsze zalety i wady omówionych metod pomiaru twardości

Metoda *Brinella*. Zaletą tej metody (ze względu na duże odciski), jest możliwość stosowania jej do pomiaru twardości materiałów niejednorodnych, jak np. żeliwo lub stopy łożyskowe. Zaletą jest również jedna skala wartości odpowiadająca jednostkom ( $N/mm^2$ ). Wadą jest fakt, że metody tej – z uwagi na możliwość odkształcenia kulki – nie można stosować do pomiaru twardości warstw utwardzonych, materiałów twardych, małych przedmiotów, powierzchni gotowych, przedmiotów i warstw cienkich, a to ze względu na duże odciski jakie powstają przy pomiarze. Wadą jest również fakt, że pomiary nie zawsze są ze sobą porównywalne.

Metoda *Rockwella*. Zaletą tej metody jest możliwość pomiaru twardości materiałów miękkich i twardych, duża szybkość pomiaru i łatwość odczytu twardości. Dlatego też metoda *Rockwella* powinna być stosowana do pomiarów przy produkcji masowej. Wadą natomiast jest konieczność – zależnie od twardości – używania dwóch skal, o różnych wartościach stałej skali  $K$ , co powoduje, że porównywanie poszczególnych skal *Rockwella* jest bardzo przybliżone. Ponadto, ze względu na małe odciski, nie można jej stosować do pomiaru twardości materiałów niejednorodnych.

Metoda *Vickersa*. Zaletą tej metody jest możliwość dokonywania pomiarów twardości materiałów miękkich i twardych przy użyciu skali w całym zakresie twardości [tzn. przy obciążeniach większych od 9,8 N] bez względu na obciążenie, porównywalność z wynikami prób *Brinella*, możliwość stosowania do pomiarów twardości warstw utwardzonych małych przedmiotów, powierzchni gotowych itp.

Wadą tej metody, ze względu na bardzo małe odciski, jest to, że nie można jej stosować do pomiaru twardości materiałów niejednorodnych.

Najlepszą, z szeroko stosowanych obecnie metod statycznego pomiaru twardości jest metoda *Vickersa*.

W przypadku pomiarów nie wymagających dużej dokładności lub pomiarów twardości materiałów niejednorodnych metodę *Vickersa* należy zastąpić metodą *Brinella*.

Metoda *Rockwella* powinna być natomiast stosowana głównie do pomiarów losowych.

#### 4.7 Pytania kontrolne

- 1) Jakie podstawowe metody pomiaru twardości stosowane są w badaniach materiałowych?
- 2) Co to jest twardość mierzona metodą *Brinella*?
- 3) Jaki jest związek między siłą obciążającą  $F$ , rodzajem materiału i średnicą kulki?
- 4) Jaka powinna być grubość próbki przy pomiarze twardości metodą *Brinella*?
- 5) Jak powinny być odległości pomiędzy odciskami i odciskiem a krawędzią próbki?
- 6) Zasady zapisu pomiaru twardości.
- 7) Wady i zalety stosowania metody *Brinella*.
- 8) Jak powinna być przygotowana do pomiaru powierzchnia próbek?
- 9) Na czym polega pomiar twardości metodą *Rockwella*? Opisać wykonanie pomiaru.
- 10) Co jest miarą twardości w metodzie *Rockwella*?
- 11) Wymienić warunki kiedy stosowanie do pomiaru twardości metody *Rockwella* jest korzystne.
- 12) Jak powinna być przygotowana powierzchnia próbki do wykonania próby *Rockwella*?
- 13) Co to jest twardość mierzona metodą *Vickersa*?
- 14) W jakich przypadkach stosowanie metody *Vickersa* jest korzystne?

## Ćwiczenie 5

### WYZNACZANIE WYTRZYMAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ METALI (PRÓBA PRZYSPIESZONA)

#### 5.1. Wprowadzenie

Obciążenia, jakie mogą pojawić się w konstrukcji maszyn ze względu na charakter działania w czasie, można podzielić na obciążenia stałe oraz zmienne w czasie. Charakter przebiegu obciążeń zmiennych może być w czasie ustalony lub nieustalony. Przy obciążeniach ustalonych siły działające zmieniają się w taki sposób, że stany obciążenia powtarzają się regularnie w pewnych stałych odstępach czasu, zwanych okresami. W ciągu jednego okresu zachodzi jeden pełny cykl zmiany obciążenia. Obciążenia nieustalone natomiast zmieniają się w sposób nieregularny i nie mają charakteru okresowego.

Obciążenia zmienne w czasie mają decydujący wpływ na charakter naprężeń występujących w obciążonych elementach maszyn i urządzeń. Podstawową cechą tych naprężeń jest również zmienność w czasie ich wartości, zgodna ze zmiennością wywołujących je obciążeń. Na podstawie badań oraz licznych przykładów praktycznych stwierdzono, że cykliczna zmiana naprężeń ujemnie wpływa na trwałość materiału, a części maszyn – narażone na działanie zmiennych w czasie obciążeń – ulegają zniszczeniu przy naprężeniach znacznie mniejszych od doraźnej wytrzymałości materiału przy statycznym obciążeniu elementów. To zjawisko obniżenia się wytrzymałości materiałów przy występowaniu naprężeń zmiennych w czasie nazywamy zmęczeniem materiałów.

#### 5.2. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne wyznaczenie wytrzymałości na zmęczenie przy symetrycznym cyklu obciążenia, a następnie – dla danych wartości granicy plastyczności  $R_e$  i wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$  badanego materiału – sporządzenie uproszczonego wykresu zmęczeniowego *Smitha* oraz wyznaczenie współczynnika bezpieczeństwa na zmęczenie dla przykładowego cyklu naprężeń zmiennych.

#### 5.3. Obciążenia i naprężenia okresowo zmienne

Najprostszym przypadkiem okresowo zmiennego obciążenia jest przypadek działania osiowej siły  $P$ , której wartość jest harmoniczną funkcją czasu  $t$ . Siła ta da się określić wzorem:

$$P = P_a \sin(\omega t), \quad (5.1)$$

gdzie  $P_a$  [N] jest amplitudą siły,  $\omega$  [s<sup>-1</sup>] – częstością kołową zmian tej siły.

Okres zmian wartości siły wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (5.2)$$

a częstość zmian

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (5.3)$$

Jeżeli  $n$  oznacza liczbę okresowych zmian zachodzących w ciągu 1 min, to:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (5.4)$$

Jeśli pod wpływem działania tak zdefiniowanej siły w obciążonym elemencie wystąpi jednoosiowy stan napięcia, to wartość głównego naprężenia normalnego zmieniać się będzie według zależności:

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t), \quad (5.5)$$

w której  $|\sigma_a|$  określa tzw. amplitudę naprężenia. Naprężenie  $\sigma$  zmieniać się zatem będzie okresowo w zakresie od  $\sigma_{max} = +\sigma_a$  do  $\sigma_{min} = -\sigma_a$ , symetrycznie względem zera. Takie naprężenia nazywać będziemy wahającymi lub oscylującymi, a przebieg ich zmian w czasie określa sinusoida (rys. 5.1a). Jedną zmianę naprężenia od wartości np.  $\sigma_{max}$  do najbliższej tej samej wartości  $\sigma_{max}$  nazywamy cyklem, a czas tej zmiany mierzony w sekundach nazywamy okresem  $T$ . W przypadku dowolnego, lecz okresowego przebiegu zmian naprężeń, wartości naprężeń są w każdej chwili inne, lecz zawsze zawarte między  $\sigma_{max}$  i  $\sigma_{min}$ . Przebieg ich zmian można zatem przedstawić również w postaci sinusoidy (patrz rys. 5.1b), której oś wyznaczona będzie przez średnie naprężenie cyklu wynoszące:

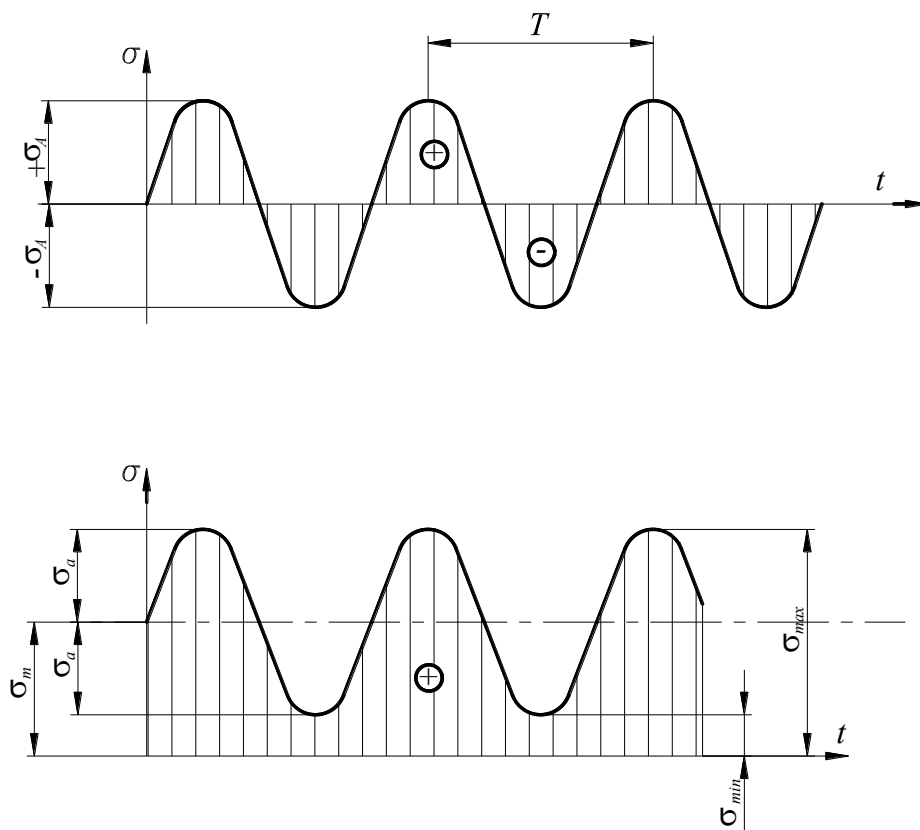
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \quad (5.6)$$

Amplitudą zmian naprężeń takiego cyklu będzie połowa algebraicznej różnicy naprężeń skrajnych  $\sigma_{max}$  i  $\sigma_{min}$ , czyli:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}. \quad (5.7)$$

Dowolny zatem okresowy przebieg zmian naprężeń można uzyskać przez nałożenie naprężeń wahających na naprężenie stałe, równe naprężeniu średniemu  $\sigma_m$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (5.8)$$



Rysunek 5.1. Sinusoidalne przebiegi zmian naprężeń  $\sigma$  w czasie a) symetryczne względem zera oraz b) niesymetryczne względem zera – oś wyznacza się przez średnie naprężenie cyklu  $\sigma_m$ .

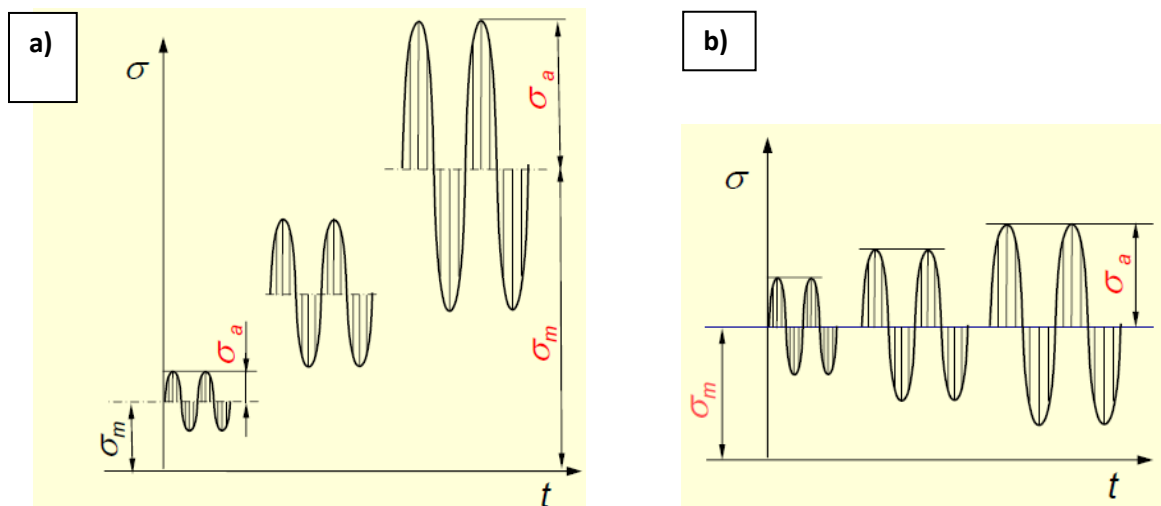
Szczególnym przypadkiem takiego okresowego przebiegu zmian naprężeń jest przypadek tzw. tętniącego cyklu naprężeń, w czasie którego naprężenia zmieniają się od wartości  $\sigma_{min}=0$  do pewnej stałej wartości  $\sigma$  dodatniej lub ujemnej – bez zmiany znaku. Amplituda tych naprężeń wynosi  $\sigma_a = \frac{1}{2}|\sigma|$ .

Stosunek naprężenia średniego  $\sigma_m$  do amplitudy naprężenia  $\sigma_a$ :

$$\kappa = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}, \quad (5.9)$$

nazywamy współczynnikiem stałości obciążenia, a stosunek najmniejszej wartości naprężeń  $\sigma_{min}$  do wartości największej  $\sigma_{max}$  nazywamy charakterystyką cyklu (lub współczynnikiem asymetrii).

Podczas pracy maszyny przejście z jednego stanu pracy maszyny do innego może odbywać się na dwa sposoby: przy zachowaniu stałego stosunku wartości średniej do amplitudy naprężenia (rys. 5.2a) lub przy zachowaniu stałej wartości naprężenia średniego (rys. 5.2b).



Rysunek 5.2. Dwa sposoby przejścia maszyny z jednego stanu pracy do innego.

W zależności od wartości naprężeń  $\sigma_{max}$  i  $\sigma_{min}$ , w których zakresie mogą się zmieniać naprężenia okresowe  $\sigma$ , rozróżnić można następujące cykle (rys. 5.3):

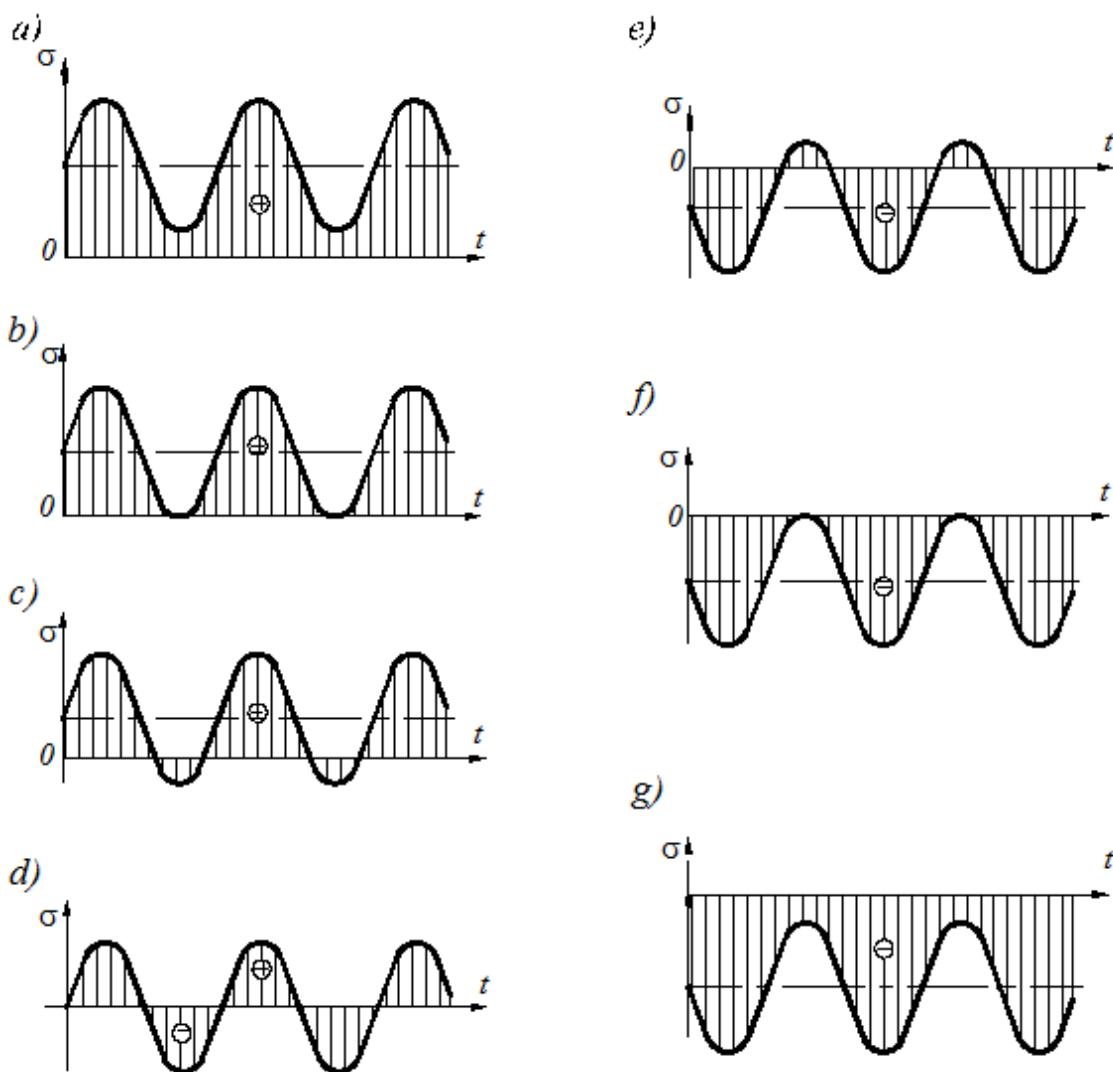
- cykl jednostronny dodatni (rys. 5.3a)
 
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{max} > 0, \\ \sigma_{min} > 0, \end{array} \right\} \text{czyli } 1 < \kappa < \infty, 0 < r < 1;$$

$$\sigma_m > 0,$$
- cykl tętniący dodatni (rys. 5.3b)
 
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{max} > 0, \\ \sigma_{min} = 0, \end{array} \right\} \text{czyli } \kappa = 1, r = 0;$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2},$$
- cykl dwustronny dodatni (rys. 5.4c)
 
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{max} > 0, \\ \sigma_{min} < 0, \\ \sigma_{max} > |\sigma_{min}| \end{array} \right\} \text{czyli } 0 < \kappa < 1, -1 < r < 0;$$

$$\sigma_m > 0,$$
- cykl wahający (oscylujący) (rys. 5.3d)
 
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{max} = +\sigma_a, \\ \sigma_{min} = -\sigma_a, \end{array} \right\} \text{czyli } \kappa = 0, r = -1;$$

$$\sigma_m = 0,$$

Rysunek 5.3. Rodzaje cykli w zależności od wartości naprężeń  $\sigma_{max}$  i  $\sigma_{min}$ .

- cykl dwustronny ujemny (rys. 5.3e)

$$\sigma_{max} > 0,$$

$$\sigma_{min} < 0,$$

$$\sigma_{max} < |\sigma_{min}|$$

czyli  $-1 < \kappa < 0, -\infty < r < -1;$

$$\sigma_m < 0,$$

- cykl tętniący ujemny (rys. 5.3f)

$$\sigma_{max} = 0,$$

$$\sigma_{min} < 0,$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{min}}{2},$$

czyli  $\kappa = -1, r = -\infty;$



– cykl jednostronny ujemny (rys. 5.3g)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{max} < 0, \\ \sigma_{min} < 0, \end{array} \right\} \quad \text{czyli} \quad -\infty < \kappa < -1, \quad 1 < r < \infty;$$
$$\sigma_m < 0,$$

Cykl wahający (oscylujący) nazywany bywa często cyklem symetrycznym, a cykl dwustronny – asymetrycznym.

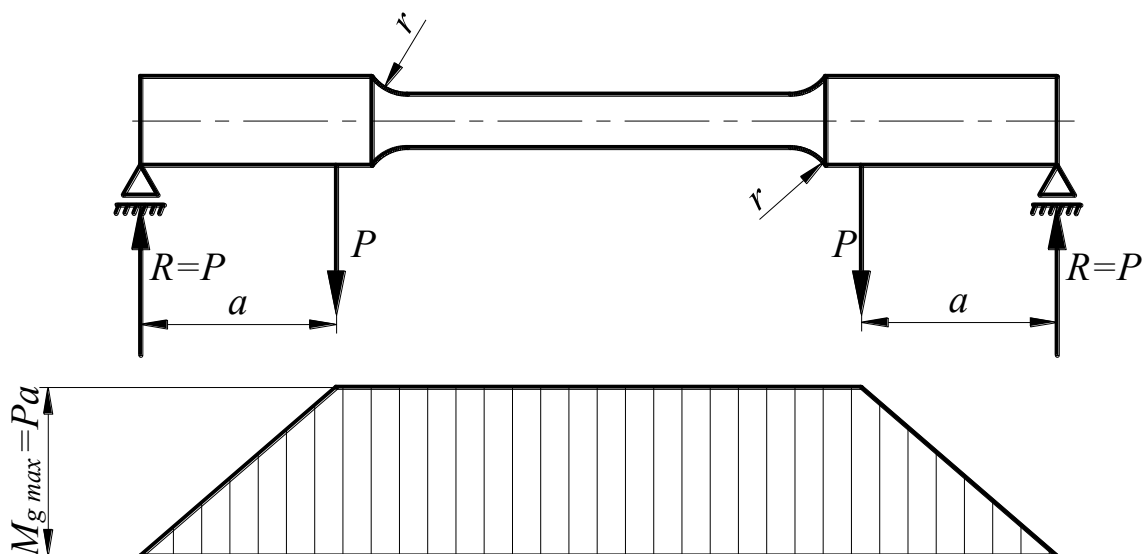
#### 5.4. Wytrzymałość zmęczeniowa przy cyklach symetrycznych

Przy obliczeniach wytrzymałościowych elementów pracujących przy obciążeniach zmiennych w czasie konieczna jest znajomość pewnych danych, które otrzymać można na podstawie odpowiednich badań laboratoryjnych.

Szczególnie ważna jest znajomość liczby cykli obciążeń zmiennych  $n$ , przy której następuje zniszczenie elementu.

Istnieje szereg metod laboratoryjnego badania materiałów na zmęczenie, pozwalających na określenie niszczącej liczby cykli. Typowe badania zmęczeniowe przeprowadza się na serii jednakowych próbek, najczęściej o przekroju kołowym, wykonanych z tego samego materiału konstrukcyjnego. Próbkę tę poddaje się obciążeniom zmęczeniowym w określonym prostym lub złożonym stanie naprężenia, a więc rozciągania i ściskania, zginania, skręcania lub jakiegokolwiek dowolnej kombinacji tych podstawowych sposobów obciążenia.

Najczęściej stosowanym przypadkiem obciążeń zmęczeniowych jest – ze względu na łatwość realizacji – symetryczne zginanie obracających się próbek, obciążonych stałymi siłami skupionymi. Siły te przyłożone są najczęściej w taki sposób, aby dawały przypadek czystego zginania w środkowej, pomiarowej części próbki. Schemat tego rodzaju obciążenia przedstawiono na rys. 5.4.



Rysunek 5.4. Schemat obciążeń próbki stałymi siłami skupionymi.

Próbki przeznaczone do badań zmęczeniowych mają zazwyczaj stały przekrój oraz dość długą część pomiarową. Promień  $r$  (patrz rys. 5.4) powinien być tak dobrany, aby jak najbardziej złagodził wpływ działania karbu. W takich próbkach przełom zmęczeniowy następuje w wyniku „swobodnego wyboru” – w miejscu najbardziej osłabionym. W różnego rodzaju badaniach zmęczeniowych stosuje się również próbki, w których przez odpowiednie osłabienie przekroju poprzecznego z góry określa się miejsce powstania przełomu zmęczeniowego.

W przekroju poprzecznym próbki obciążonej według schematu podanego na rys. 5.4 wystąpi liniowy rozkład naprężeń wzdłuż wysokości tego przekroju. Włókna górne leżące powyżej warstwy obojętnej zginania podlegać będą jednokierunkowemu ścisnaniu, dolne natomiast jednokierunkowemu rozciąganiu. Jeśli tak obciążoną próbkę wprowadzić w ruch obrotowy, to naprężenia powstające w poszczególnych włóknach próbki zmieniać będą znak co pół obrotu, a liczba cykli zmian tych naprężeń równa będzie liczbie obrotów  $n$ .

Naprężenia normalne w każdym punkcie przekroju poprzecznego zmieniają się zatem sinusoidalnie z częstością kołową:

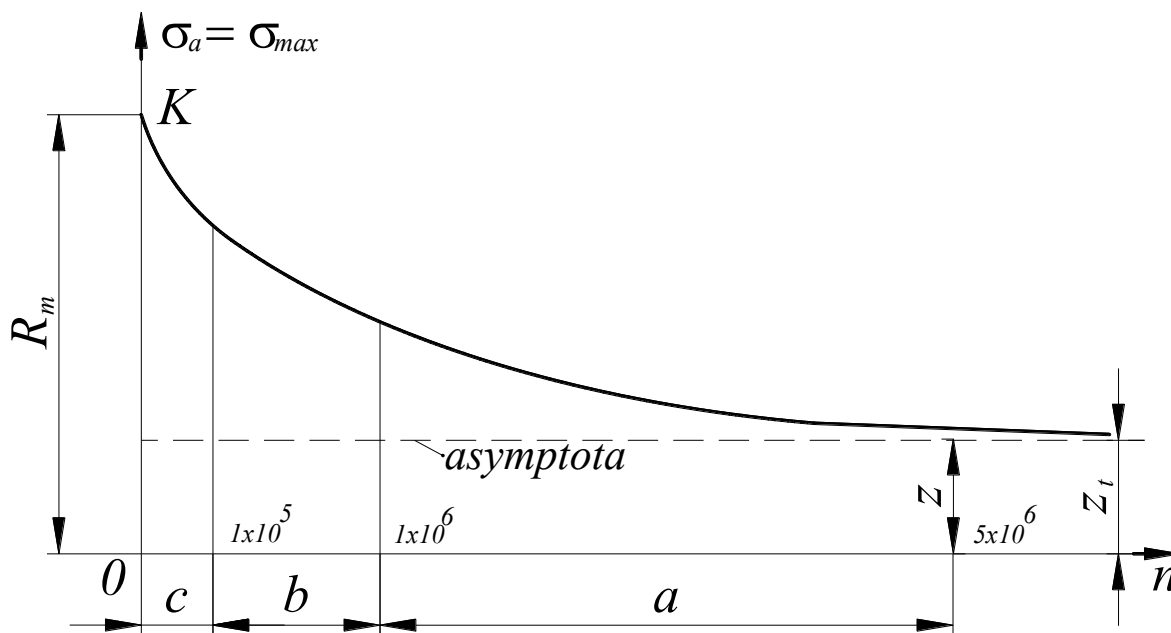
$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (5.10)$$

przy czym największa ich wartość wynosi:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_g}{W_z} = \pm \frac{32M_g}{\pi d^3}, \quad (5.11)$$

gdzie  $M_g = Pa$  jest momentem zginającym pomiarową część próbki,  $d$  – średnicą części pomiarowej próbki. Zrealizowany w ten sposób cykl obciążeń jest cyklem symetrycznym o amplitudzie  $\sigma_a = \sigma_{max}$ .

Badania zmęczeniowe przeprowadza się na serii jednakowych próbek, z których każdą obciąża się innymi wartościami naprężeń  $\sigma_{max}$ , mierząc liczbę cykli  $n$  zmian tego obciążenia potrzebną do spowodowania zmęczeniowego zniszczenia próbki. Otrzymane w ten sposób zależności  $n = f(\sigma_{max})$  dadzą się przedstawić w układzie współrzędnych  $\sigma_{max}-n$  w postaci krzywej noszącej nazwę wykresu *Wöhlera*. Jej przebieg, typowy dla stali konstrukcyjnych, przedstawiono na rys. 5.5.



Rysunek 5.5. Wykres *Wöhlera* dla stali konstrukcyjnych.

Przy malejących wartościach naprężeń  $\sigma_{max}$  krzywa *Wöhlera* dąży asymptotycznie do pewnej linii prostej, równoległej do osi  $n$ , co oznacza, że materiał badany jest w stanie przenieść nieskończenie dużą liczbę cykli zmian takich naprężeń, których amplituda nie przekroczy wartości odpowiadającej położeniu tej asymptoty. Naprężenie określające położenie tej asymptoty odpowiada rzeczywistej (nieograniczonej) wytrzymałości zmęczeniowej  $Z_t$ . W praktyce położenie poziomej asymptoty krzywej *Wöhlera* określa się z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością przez podanie rzędnej tej krzywej w punkcie odpowiadającym umownej, bardzo dużej liczbie  $N = 5 \cdot 10^6 \div 5 \cdot 10^7$  cykli zmęczeniowych, praktycznie uważanej za nieskończoną.

Wytrzymałością zmęczeniową  $Z$  przy cyklach symetrycznych nazywamy zatem największą wartość naprężenia  $\sigma_{max}$ , które próbka wykonana z badanego materiału może przenieść praktycznie nieskończoną liczbę razy. Naprężenia powodujące zniszczenie próbek przy liczbie cykli  $n$  mniejszej od  $N$  określają czasową (ograniczoną) wytrzymałość zmęczeniową, którą dzieli się na trzy następujące przedziały zmęczeniowego zniszczenia materiału:

- przedział właściwych przelomów zmęczeniowych (przedział *a*),
- przedział przedwczesnych przelomów zmęczeniowych (przedział *b*),
- przedział przelomów okresowego przeciążenia (przedział *c*).

Przy liczbie cykli *n* dążącej do zera krzywa *Wöhlera* dąży do punktu *K*, leżącego na osi rzędnych. Jego położenie odpowiada wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$ .

Znajomość zakresów przedziałów zmęczeniowego zniszczenia materiału ma zasadnicze znaczenie przy projektowaniu elementów takich urządzeń pracujących przy obciążeniach zmiennych, dla których znana bądź założona łączna liczba cykli w czasie całego okresu pracy jest mniejsza od *N*. Natomiast zawsze bezpiecznym cyklem symetrycznie zmiennych obciążeń będzie cykl, którego amplituda naprężeń  $\sigma_a = \sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$  będzie mniejsza lub co najwyżej równa wytrzymałości zmęczeniowej  $Z_t$  określonej położeniem asymptoty krzywej *Wöhlera*.

## 5.5. Oznaczenia

Wytrzymałość zmęczeniową przyjęto oznaczać dużą literą *Z* z dwoma wskaźnikami, z których pierwszy określa rodzaj zmiennego obciążenia (np. zginanie, rozciąganie, skręcanie itp.), drugi zaś – charakter cyklu (jednostronny, obustronny). Zestawienie oznaczeń wytrzymałości na zmęczenie dla różnych rodzajów obciążeń podano w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Zestawienie oznaczeń wytrzymałości na zmęczenie dla różnych rodzajów obciążeń.

Rodzaj obciążenia	Charakter cyklu	
	zmienny jednostronny	zmienny obustronny
Rozciąganie	$Z_{rj}$	$Z_{ro}$
Ściskanie	$Z_{cj}$	$Z_{co}$
Ścinanie	$Z_{tj}$	$Z_{to}$
Skręcanie	$Z_{sj}$	$Z_{so}$
Zginanie	$Z_{gj}$	$Z_{go}$

Pomiędzy wartościami wytrzymałości na zmęczenie dla różnego rodzaju tego samego materiału ustalono (na podstawie danych doświadczalnych) następujące zależności:

– przy cyklach obustronnych:

$$Z_{ro} \approx 0.7Z_{go}, \quad Z_{so} \approx 0.57Z_{go}, \quad (5.12)$$

– przy cyklach jednostronnych:

$$Z_{gj} \approx 1.5Z_{go}, \quad Z_{rj} \approx 1.5Z_{go}, \quad Z_{sj} \approx 1.5Z_{so}. \quad (5.13)$$

## 5.6 Wytrzymałość zmęczeniowa przy cyklach niesymetrycznych

Ponieważ często obciążeniami zmiennymi działającymi na rozmaite części maszyn są obciążenia wywołujące niesymetrycznie zmienne cykle naprężeń, dlatego konieczna jest znajomość wytrzymałości na zmęczenie różnego rodzaju materiałów również przy tego rodzaju cyklach.

W celu wyznaczenia własności zmęczeniowych materiału dla różnych cykli niesymetrycznych należy przeprowadzić serie badań analogicznych do tych, jakie stosuje się przy cyklach symetrycznych.

Mianowicie, dla przyjętej wartości naprężenia średniego  $\sigma_m$  wyznacza się metodą szeregu prób taką wartość amplitudy  $\sigma_a$ , żeby naprężenia zmieniające się w zakresie

$$\sigma_{\min} = \sigma_m \pm \sigma_a, \quad (5.14)$$

mogły być przez materiał przeniesione nieskończoną liczbę razy. Uzyskuje się w ten sposób dla szeregu cykli o różnych wartościach naprężenia średniego odpowiednie krzywe *Wöhlera*. Na ich podstawie można wyznaczyć – dla danej wartości naprężenia średniego  $\sigma_m$  – odpowiadające wartości naprężenia  $\sigma_{\max}$  oraz  $\sigma_{\min}$  a tym samym określić wszystkie parametry danego cyklu niesymetrycznego, spełniającego warunki wytrzymałościowe. Wyniki tych badań dla różnych cykli niesymetrycznych (różniących się między sobą wartościami naprężenia średniego  $\sigma_m$ ) – w celu uzyskania większej przejrzystości oraz przydatności dla celów praktycznych – podawane są zwykle w postaci wykresu zbiorczego. Jednym z nich jest wykres *Smitha* (rys. 5.6).

W celu zbudowania tego wykresu przyjmuje się prostokątny układ współrzędnych, w którym oś odciętych odpowiada naprężeniu średniemu  $\sigma_m$ , a na osi rzędnych odkłada się ekstremalne wartości  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  cyklu niesymetrycznego. Przez początek 0 przyjętego układu współrzędnych prowadzi się prostą nachyloną pod kątem  $45^\circ$  do osi odciętych, dzięki czemu rzędna i odcięta dowolnego punktu  $K$  tej prostej równa jest naprężeniu średniemu  $\sigma_m$ . Jeśli do rzędnej punktu  $K$  dodać wartość amplitudy  $\sigma_a$  danego cyklu, to otrzymamy punkt  $M$  odpowiadający największemu naprężeniu  $\sigma_{\max}$  cyklu, przez odjęcie zaś od tej rzędnej wartości  $\sigma_a$  – punkt  $N$  odpowiadający najmniejszemu naprężeniu  $\sigma_{\min}$

cyklu. Zbiór punktów  $M$  przedstawia krzywą zależności  $\sigma_m=f(\sigma_a)$ , a zbiór punktów  $N$  – krzywą zależności  $\sigma_m=f(\sigma_a)$  dla różnych niesymetrycznych cykli naprężeń, spełniających warunki wytrzymałości zmęczeniowej materiału.

Na rysunku 5.6 przedstawiającym wykres *Smitha* dla typowej stali konstrukcyjnej (przypadek rozciągania – ściskania) pokazano obydwie krzywe. Krzywe te są biegunowo symetryczne względem początku 0 układu współrzędnych. Na wykresie tym zaznaczono ponadto wartości wytrzymałości na zmęczenie charakterystycznych cykli, a mianowicie: cyklu wahającego (oscylującego)  $Z_{ro} - Z_{co}$ , cyklu tętniącego dodatniego  $Z_{rj}$  oraz cyklu tętniącego ujemnego  $Z_{cj}$ . Najwyższy punkt  $L$  wykresu odpowiada wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$  materiału, którą można w tym przypadku traktować jako granicę wytrzymałości zmęczeniowej przy liczbie  $n$  cykli obciążenia dążącego do zera (porównać z wykresem *Wöhlera*, rys. 5.5).

Jak wiadomo, wartości naprężeń w częściach maszyn nie mogą w praktyce przekraczać granicy plastyczności  $R_e$ . Z tego względu wykresy *Smitha* do celów praktycznych są ograniczone liniami prostymi, równoległymi do osi odciętych i położonymi w odległościach równych  $R_e$  od tych osi (zwrócić uwagę na przyjętą skalę naprężeń). Wprowadzenie tego ograniczenia pociąga za sobą pewne zmodyfikowanie wykresu *Smitha* przez zastąpienie części krzywych wykresu, a mianowicie części  $G-L-J$  oraz  $P-T-S$  odpowiednimi odcinkami prostoliniowymi  $GH$  i  $HJ$  oraz  $PR$  i  $RS$ . Z uwagi na duże wartości promieni krzywizn zwykle i pozostałe części górnej i dolnej krzywej wykresu zastępuje się odcinkami linii prostych  $AG$ ,  $JB$ ,  $BP$  oraz  $SA$  tak, jak to zaznaczono liniami przerywanymi na rys. 5.6.

Dla materiałów plastycznych, które na ogół wykazują takie same własności wytrzymałościowe dla rozciągania, jak i dla ściskania, zmęczeniowy wykres *Smitha* rysuje się zwykle jedynie w zakresie dodatnich wartości naprężenia średniego.



## 5.7. Uproszczony wykres *Smitha*

Sporządzenie pełnego wykresu *Smitha* wymaga dużego nakładu pracy i środków finansowych, wiąże się bowiem z koniecznością przeprowadzenia dużej liczby długotrwałych badań laboratoryjnych. W celu szybszego uzyskania wyników o zadowalającej – z punktu widzenia zastosowań praktycznych – ścisłości wykreśla się często uproszczone wykresy *Smitha*, wymagający znajomości znacznie mniejszej liczby parametrów wytrzymałościowych materiału. Do sporządzenia uproszczonego wykresu *Smitha*, na przykład dla przypadku rozciągania, potrzebna jest jedynie znajomość doraźnej wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$  granicy plastyczności  $R_e$ , i wytrzymałości na zmęczenie dla cyklu wahającego  $Z_{ro} = Z_{co}$ . W przypadku gdy wartość wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$  nie jest znana, można do jej określenia posłużyć się zależnościami, jakie istnieją między różnymi wielkościami charakteryzującymi wytrzymałościowe cechy materiału. Zależności te mają na ogół charakter empiryczny.

W tabelicy 5.2 zestawiono przykładowo zależności między wytrzymałością na zmęczenie przy zginaniu obustronnym  $Z_{go}$  a wytrzymałością na rozciąganie  $R_m$  przy obciążeniu statycznym dla kilku podstawowych materiałów konstrukcyjnych.

Tablica 5.2. Zestawienie przykładowo zależności między wytrzymałością na zmęczenie przy zginaniu obustronnym  $Z_{go}$  a wytrzymałością na rozciąganie  $R_m$  przy obciążeniu statycznym.

	Materiał			
	stal	staliwo	żeliwo	brąz, brązal stopy lekkie
$Z_{go}$	$(0,36 \div 0,58) R_m$ , średnio $0,47 R_m$	$(0,30 \div 0,45) R_m$ , średnio $0,36 R_m$	$(0,35 \div 0,60) R_m$ , średnio $0,47 R_m$	$(0,30 \div 0,40) R_m$ średnio $0,35 R_m$

Mając zatem znaną wytrzymałość na zmęczenie dla dowolnego cyklu oscylującego można – na podstawie zależności podanych w pkt. 5.5 oraz danych zawartych w tabeli 5.2 – określić wytrzymałość na rozciąganie  $R_m$ , a następnie granicę plastyczności  $R_e$  np. dla stali  $R_e = 0,65 R_m$ .

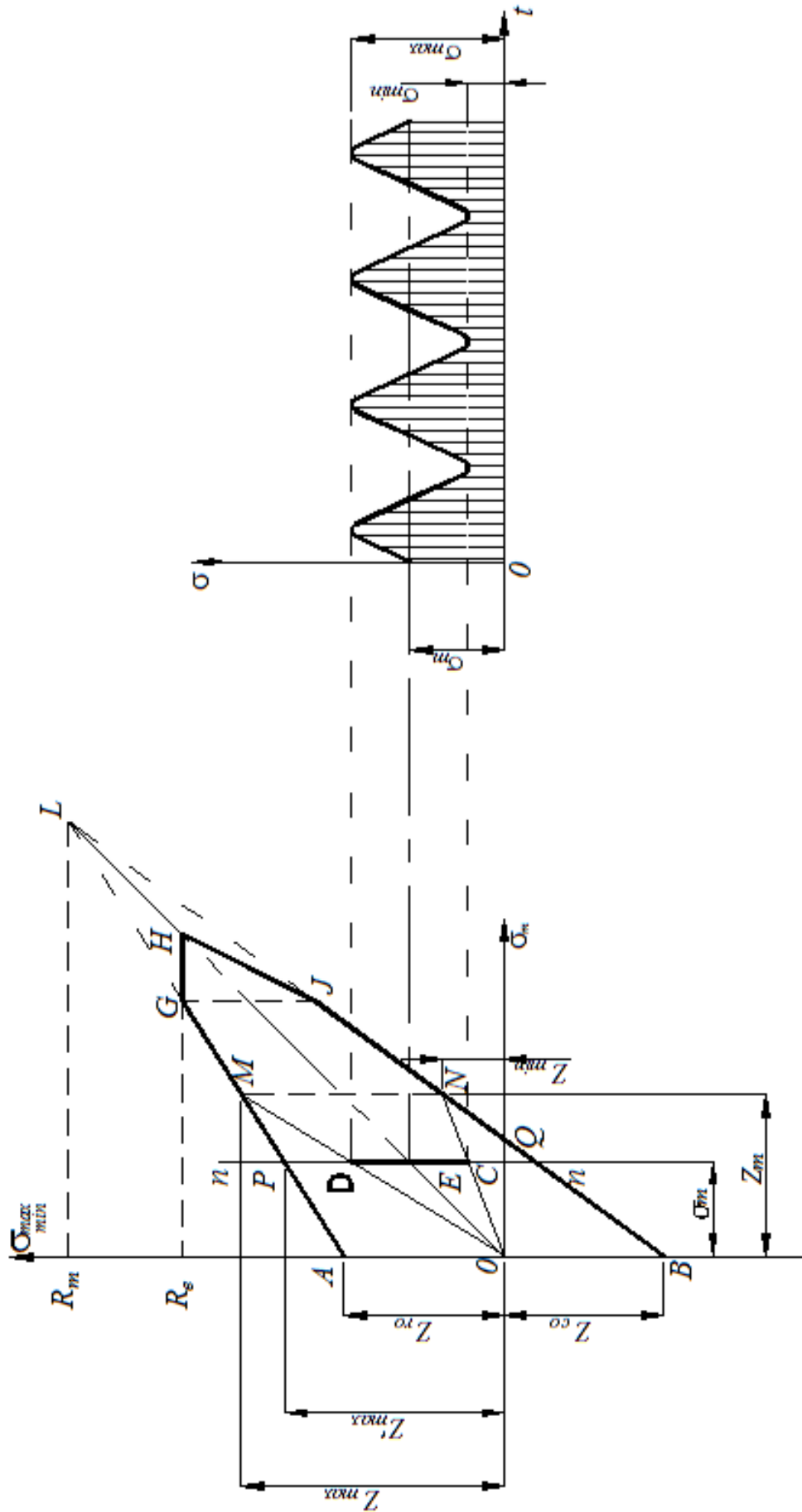
Uproszczony wykres *Smitha* sporządza się w następujący sposób:

1. Przyjmuje się układ współrzędnych:  $\sigma_{\max}, \sigma_m$ .
2. Prowadzi się przez początek  $O$  tego układu linię prostą nachyloną pod kątem  $45^\circ$  do osi odciętych.



3. Odkłada się na osi rzędnych wartości  $Z_{ro} = Z_{co}$  (punkty  $A$  i  $B$  na wykresie) oraz  $R_m$ .
4. Prowadzi prostą poziomą na wysokości odłożonej wartości  $R_m$  – wyznacza ona punkt  $L$ .
5. Łącząc punkty  $A$  i  $B$  z punktem  $L$  otrzymuje się uproszczony wykres *Smitha*.
6. Pole tego wykresu należy ograniczyć tak, aby maksymalne wartości naprężeń nie przekroczyły granicy plastyczności. W tym celu na wysokości rzędnej, równej granicy plastyczności materiału  $R_e$ , prowadzi się poziomą linię prostą, która w przecięciu z linią  $AL$  wyznacza punkt  $G$ , w przecięciu zaś z prostą  $OL$  – punkt  $H$ .
7. Rzutując następnie wzdłuż pionu punkt  $G$  na linię  $BL$  otrzymamy punkt  $J$ .

Uproszczony wykres *Smitha* przedstawia łamana linia  $A-G-H-J-B$  (rys. 5.7).

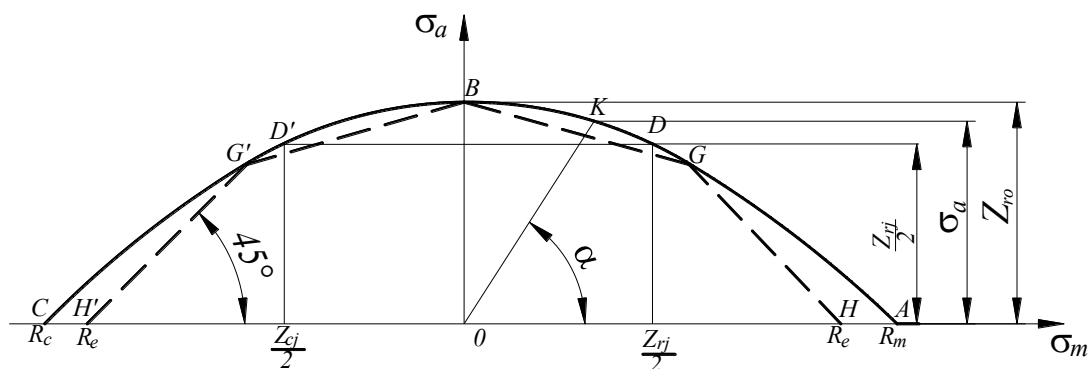


Rysunek. 5.7. Uproszczony wykres Smitha.

### 5.8. Wykres zmęczeniowy *Haigha*

Przy obliczeniach wytrzymałościowych części maszyn pracujących przy obciążeniach zmiennych duże znaczenie praktyczne ma wykres zmęczeniowy *Haigha* ze względu na prostszą konstrukcję w porównaniu z wykresem *Smitha* oraz możliwość łatwiejszego prowadzenia analizy wytrzymałościowej i doboru naprężeń dopuszczalnych.

Wykres *Haigha* sporządza się w prostokątnym układzie współrzędnych, odkładając na osi odciętych (oś pozioma układu współrzędnych) wartość średnią  $\sigma_m$  cyklu naprężenia zmiennego, a na osi rzędnych (oś pionowa układu współrzędnych) wartość jego amplitudy  $\sigma_a$ . Często dla zwiększenia dokładności odczytu stosuje się różne skale na osiach odciętych i rzędnych wykresu. Do sporządzenia pełnego wykresu zmęczeniowego *Haigha* potrzebna jest znajomość tych samych wielkości co przy konstruowaniu pełnego wykresu zmęczeniowego *Smitha*.



Rysunek 5.8. Wykres *Haigha*  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ .

Wykres *Haigha* stanowi zbiór punktów  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ , przedstawiony krzywą ABC (rys. 5.8). Krańcowe punkty A i C wykresu odpowiadają wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie, punkt B – amplitudzie cyklu symetrycznego, punkty D i D' – amplitudom cykli tętniących: dodatniego i ujemnego, a punkt K – dopuszczalnej amplitudzie cyklu dowolnego. Podobnie jak wykres *Smitha*, również i wykres *Haigha* można uprościć, wprowadzając odcinki prostoliniowe BG i BG' oraz GH i GH' zamiast odpowiednich części krzywej ABC. Uzyskujemy wykres uproszczony H-G-B-G'-H', odpowiadający uproszczonemu wykresowi *Smitha*. Odpowiedniość ta jest oczywista zważywszy, że wykres zmęczeniowy *Haigha* jest właściwie „położonym” wykresem *Smitha* – ograniczonym do jego górnej gałęzi – przy jednoczesnym zwiększeniu podziałki naprężeń średnich  $\sigma_m$  w stosunku  $1/\sqrt{2}$ . Jak widać, kąt  $\alpha$  nachylenia dowolnego promienia OK na wykresie *Haigha* wyraża się współczynnikiem stałości obciążeniu i współczynnikiem asymetrii cyklu  $r$  następującym związkiem:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \kappa = \frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{1+r}{1-r}. \quad (5.15)$$

## 5.9. Wyznaczanie współczynników bezpieczeństwa przy obciążeniach zmiennych

Obliczenia wytrzymałościowe elementów maszyn i konstrukcji narażonych na działanie obciążeń zmiennych w czasie sprowadzają się do sprawdzenia, czy zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa  $x_z$  nie jest mniejszy od wymaganego współczynnika bezpieczeństwa  $x_w$ . Musi bowiem zawsze zachodzić zależność:

$$x_z \geq x_w. \quad (5.16)$$

W przypadku obciążeń obustronnie zmiennych (oscylujących) zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa  $x_z$  określa się stosunkiem wytrzymałości na zmęczenie  $Z_o$  cyklu symetrycznego do amplitudy  $\sigma_a = \sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$  symetrycznego cyklu naprężeń zmęczeniowych, wywołanych przyłożonym obciążeniem. Zatem

$$x_z = \frac{Z_o}{\sigma_a} \geq x_w. \quad (5.17)$$

Zamiast  $Z_o$  należy przyjmować taką wartość wytrzymałości na zmęczenie, jaka odpowiada danemu rodzajowi obciążenia, a więc:

- $Z_{ro}$  i  $Z_{co}$  dla rozciągania i ściskania,
- $Z_{go}$  dla zginania,
- $Z_{to}$  i  $Z_{so}$  dla ścinania i skręcania.

W przypadku obciążeń wywołujących niesymetrycznie zmienne cykle naprężeń wyznaczenie zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa  $x_z$  jest bardziej złożone niż w przypadku obciążeń dających cykle symetryczne. Współczynnik ten wyznacza się na przykład przy użyciu wykresu *Smitha* w pełnej lub uproszczonej postaci.

Jak wiadomo (patrz pkt. 5.6), ekstremalne wartości niesymetrycznego cyklu naprężeń zmiennych określa się za pomocą wartości średniej cyklu  $\sigma_m$  oraz naprężeń  $\sigma_a$  równych wartości amplitudy nałożonego cyklu symetrycznego. Podstawowymi zatem parametrami dowolnego niesymetrycznego cyklu naprężeń zmiennych są  $\sigma_m$  i  $\sigma_a$ , a z punktu widzenia wyznaczania zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa  $x_z$  – stosunek tych wartości, a mianowicie  $\sigma_a/\sigma_m$ . Sposób określania zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa  $x_z$  dla danego niesymetrycznego cyklu naprężeń opiera się bowiem na założeniu, że w czasie wzrostu obciążeń stosunek amplitudy naprężeń  $\sigma_a$  do średniej wartości  $\sigma_m$  cyklu pozostaje nie zmieniony:  $\sigma_a/\sigma_m = const$ . W tym przypadku zachodzi zatem konieczność określenia wytrzymałości zmęczeniowej cyklu o tym samym stosunku  $\sigma_a/\sigma_m$  co cykl dany. W tym celu na osi odciętych wykresu *Smitha* (rys. 5.7) odkładamy odcinek równy naprężeniu średniemu  $\sigma_m$  danego cyklu (punkt  $C$ ), a następnie na prostej pionowej  $n-n$ , poprowadzonej przez punkt  $C$ , wyznaczamy punkty  $D$  i  $E$ , określające największe ( $\sigma_{\max}$ ) i najmniejsze ( $\sigma_{\min}$ ) wartości naprężeń tego cyklu. Następnie prowadzimy dwie proste wyprowadzone z punktu  $O$  (początek układu współrzędnych  $\sigma_{\max}, \sigma_a$  wykresu *Smitha*), z których jedna przechodzi przez punkt  $D$  i przecina górną gałąź wykresu *Smitha* w punkcie  $M$ , druga zaś przechodzi przez punkt  $E$  i przecina dolną gałąź wykresu

*Smitha* w punkcie  $N$ . Współrzędne otrzymanych w ten sposób punktów  $M$  i  $N$  określają parametry cyklu podobnego do cyklu danego, o tym samym stosunku  $\sigma_a/\sigma_m$ , ale odpowiadającego wytrzymałości zmęczeniowej. Punkty  $M$  i  $N$  leżą na prostej pionowej, przecinającej oś odciętych  $\sigma_m$  w odległości równej naprężeniu średniemu  $Z_m$ , rzędne zaś tych punktów wyznaczają odpowiednie naprężenie maksymalne  $Z_{\max}$  oraz minimalne  $Z_{\min}$  tego cyklu.

W przypadkach cykli niesymetrycznych, dla których zachowany jest stosunek  $\sigma_a/\sigma_m = const$ , zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa określa się wzorem:

$$x_z = \frac{Z_{\max}}{\sigma_{\max}} \geq x_w. \quad (5.18)$$

Jeśli natomiast przy wzroście obciążeń następuje wzrost ekstremalnych wartości  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  niesymetrycznego cyklu naprężeń, ale naprężenie średnie tego cyklu pozostaje stałe ( $\sigma_m = const$ ), to wytrzymałość zmęczeniowa odpowiadająca temu cyklowi (np. cyklowi przedstawionemu odcinkiem  $DE$  na wykresie *Smitha*, rys. 5.7) przedstawiona jest punktami  $P$  i  $Q$  otrzymanymi z przecięcia pionowej prostej  $n-n$ , poprowadzonej przez punkt  $C$ , odpowiednio z górną i dolną gałęzią wykresu *Smitha*.

Dla tego rodzaju cykli niesymetrycznych zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa wyraża się zależnością:

$$x_z = \frac{Z'_{\max}}{\sigma_{\max}} \geq x_w. \quad (5.19)$$

Wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa  $x_w$  określany jest na ogół jako iloczyn szeregu współczynników zależnych od jednorodności materiału, stopnia gładkości powierzchni, ważności elementu maszynowego z punktu widzenia konsekwencji jego zmęczeniowego zniszczenia oraz wymaganego stopnia pewności.

Gdy brak jest bliższych danych dotyczących wymaganego zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa  $x_w$ , wtedy można przyjąć jego wartość równą współczynnikowi bezpieczeństwa  $x$  przy obciążeniach statycznych wyznaczonemu w odniesieniu do granicy plastyczności  $R_e$ .

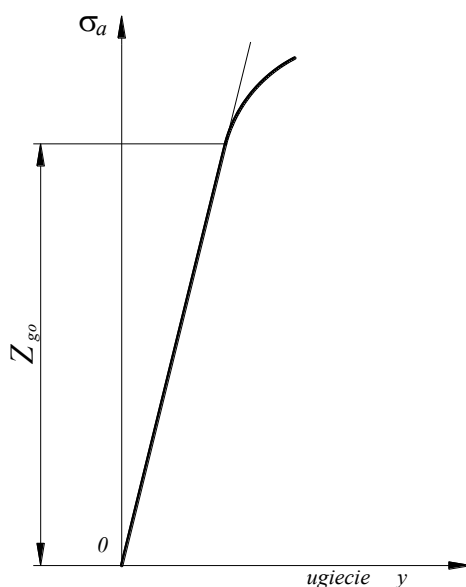
## 5.10. Istota próby przyspieszonej wyznaczania wytrzymałości zmęczeniowej

Ze względu na dużą pracochłonność, znaczne koszty oraz długotrwałość prowadzenia typowych, klasycznych badań, mających na celu wyznaczenie wartości wytrzymałości zmęczeniowej materiału, od dawna prowadzone były różnego rodzaju próby wprowadzenia skróconych badań zmęczeniowych, które przyspieszyły by wyznaczenie rzeczywistej (nieograniczonej) wartości wytrzymałości zmęczeniowej i to na możliwie niewielkiej liczbie próbek. Zwiększenie częstości zmian obciążenia, ograniczone zresztą możliwościami technicznymi, nie rozwiązywało zagadnienia. Dopiero lepsze poznanie fizycznej strony procesu zmęczeniowego zniszczenia materiału pozwoliło na opracowanie przyspieszonych, dających zadowalające, praktyczne wyniki. Jedną z nich – metoda *Lehra* – opiera się na wykorzystaniu zaobserwowanej własności, że po przekroczeniu wartości amplitudy naprężeń zmiennych, bliskiej wytrzymałości zmęczeniowej, w badanych próbkach występuje wyraźny wzrost temperatury, odkształcenia oraz rozpraszania energii. Najczęściej metoda ta służy do

wyznaczania przybliżonej wartości wytrzymałości zmęczeniowej  $Z_{go}$  przy czystym zginaniu obrotowym.

Istotą tej metody jest zastosowanie zmiennego obciążenia o amplitudach rosnących w pewien regularny sposób i dokonywanie jednoczesnych pomiarów, na przykład zmian temperatury za pomocą termometru termoelektrycznego bądź też odkształceń badanej próbki, a także zmian momentu obrotowego. W efekcie uzyskuje się szereg danych pozwalających na sporządzenie wykresów zależności tych wielkości od wzrastającej amplitudy naprężenia. Okazuje się, że początkowo – przy małych wartościach amplitudy – zależności te są liniowe. Natomiast gdy amplituda naprężeń zmiennych przekroczy wartość rzeczywistej (nieograniczonej) wytrzymałości zmęczeniowej, punkty każdego z wykresów zaczynają tworzyć linie krzywe odchylające się od pierwotnych linii prostych. Następuje znaczny – w stosunku do okresu poprzedniego – wzrost wartości mierzonych wielkości przy niewielkim wzroście amplitudy naprężeń zmiennych.

Za wytrzymałość zmęczeniową przyjmuje się tę wartość naprężeń, przy której następuje zagięcie pierwotnie prostoliniowego wykresu badanych wielkości: ugięcia  $y$ , temperatury  $T$  czy momentu obrotowego  $M_0$  od amplitudy  $\sigma_a$ .

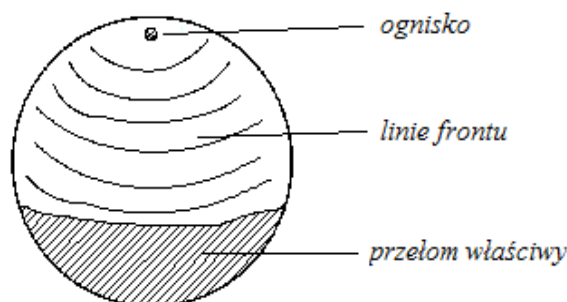


Rysunek 5.9. Przykładowy wykres zależności amplitudy  $\sigma_a$  naprężenia zmiennego od ugięcia  $y$  przy obrotowym zginaniu.

### 5.11. Zasadnicze cechy przelomów

Postać przelomu zmęczeniowego różni się w zasadniczy sposób od typowych przelomów powstających przy doraźnym zniszczeniu wywołanym statycznie działającymi obciążeniami. Właściwy przelom zmęczeniowy jest z reguły gładki, niepostrzępiony i nie wykazuje wyraźnych odkształceń plastycznych - nawet w metalach bardzo ciągliwych. Pęknięcia zmęczeniowe powstają w tzw. ogniskach (punkt  $O$  na rys. 5.10), które są na ogół miejscami spiętrzenia naprężeń lub lokalnego

osłabienia, wywołanego na przykład pęcherzykami, różnego rodzaju wtrąceniami, zniekształceniami siatki krystalicznej, innymi wadami materiału lub błędami konstrukcyjno-technologicznymi (podcięcia, karby itp.).



Rysunek 5.10. Przebieg procesu zmęczeniowego zniszczenia materiału z widocznymi dwoma obszarami: właściwego pęknięcia i końcowego złomu doraźnego.

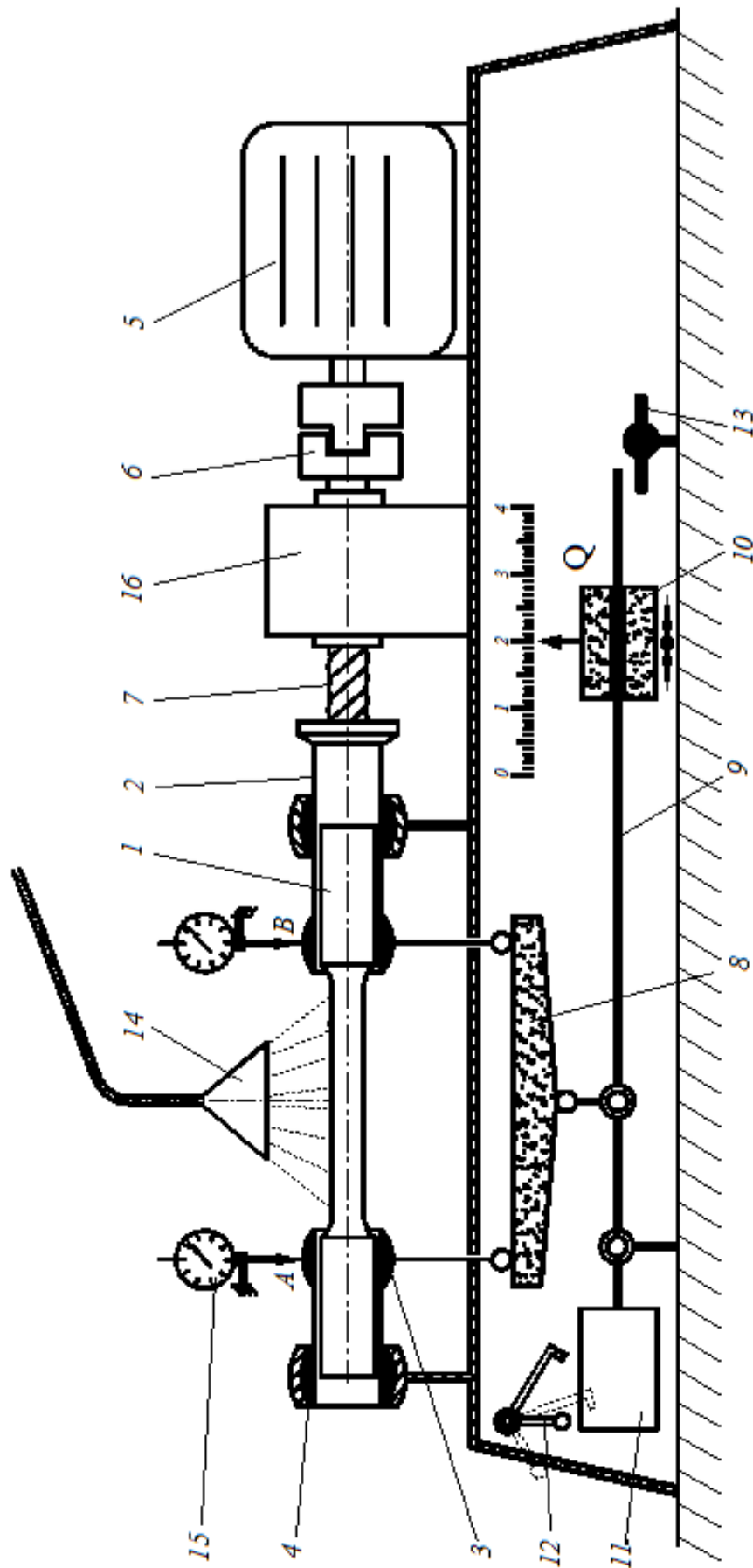
Zapoczątkowane w ogniskach pęknięcia pod wpływem obciążeń zmiennych rozwijają się, obejmując z czasem coraz większą część przekroju poprzecznego. Rozwój tych pęknięć jest na ogół powolny i zależy od bardzo wielu czynników, jak na przykład od rodzaju, charakteru i amplitudy obciążenia zmiennego, jakości materiału, warunków eksploatacji itp. Samo zaś zniszczenie następuje w sposób gwałtowny wskutek nagłego zniszczenia pozostałej, dotychczas nienaruszonej części przekroju. W konsekwencji takiego przebiegu procesu zmęczeniowego zniszczenia materiału, w przełomie wyraźnie rozróżnić można dwa charakterystyczne obszary (rys. 5.10): obszar właściwego pęknięcia zmęczeniowego o gładkiej, często aż wypolerowanej powierzchni i obszar końcowego złomu doraźnego o powierzchni matowej, chropowatej (część zakreskowana na rys. 5.10). Obraz tego końcowego złomu doraźnego nie różni się w zasadzie niczym specjalnym od przełomów uzyskiwanych w próbach statycznych. Natomiast gładka, często aż błyszcząca powierzchnia obszaru właściwego złomu zmęczeniowego powstaje wskutek tego, że podczas stopniowego rozwoju pęknięcia zmęczeniowego obydwie powierzchnie przełomu naciskają na siebie okresowo – zgodnie z okresowością zmian wartości naprężeń, w wyniku czego następuje ich ścieranie i zgniatanie. Stopień gładkości i pozornie większej drobnoziarnistości powierzchni tej części przełomu jest tym większy, im większa jest liczba cykli zmian naprężeń prowadzących do całkowitego zniszczenia, a więc im większa jest odpowiadająca liczba tych kolejnych kontaktów. Właściwy przełom zmęczeniowy będzie zatem tym gładziej i obejmować będzie tym większą część całkowitego przełomu zniszczenia, im mniejsze były wartości okresowo zmiennych naprężeń. Przy wzroście zaś tych naprężeń stopień gładkości przełomu zmęczeniowego będzie malał przy jednoczesnym wzroście procentowego udziału obszaru zniszczenia doraźnego.

Bardzo często na powierzchni właściwego złomu zmęczeniowego wyraźnie występują linie odpowiadające kolejnym położeniom czoła pęknięcia (szczeliny) zmęczeniowego w różnych stadiach jego stopniowego rozszerzania się. Są to tzw. linie spoczynkowe, zwane również liniami frontu szczeliny zmęczeniowej. Ich pojawienie się jest wynikiem jak gdyby krótkotrwałego zatrzymania się dalszego wzrostu szczeliny w poprzedniej płaszczyźnie i jej przeskokiem do płaszczyzny sąsiedniej. Spowodowane jest to zahamowaniem rozwoju szczeliny po natrafieniu postępującego jej czoła na obszary materiału o lokalnie większej wytrzymałości. Końcowe położenie czoła szczeliny zmęczeniowej określone jest linią rozgraniczającą strefę zniszczenia zmęczeniowego od strefy zniszczenia doraźnego. Układ i kształt linii spoczynkowych pozwala na wyciągnięcie pewnych

wniosków na temat rozwoju szczeliny zmęczeniowej oraz usytuowania miejsca zapoczątkowania złomu zmęczeniowego, tzn. jego ogniska.

Najnowsze badania, przy zastosowaniu specjalnych metod mikroskopii elektronowej, pozwoliły na wyodrębnienie w obszarze właściwego złomu zmęczeniowego prążków o układzie zbliżonym do układu linii spoczynkowych, z których każdy odpowiada jednemu cyklowi zmiennych naprężeń obciążających. Należy nadmienić, że obrazy przełomów zmęczeniowych mogą być bardzo zróżnicowane, mogą zawierać jedno lub więcej ognisk zmęczeniowych i w związku z tym mieć bardzo różnorodny układ linii spoczynkowych.



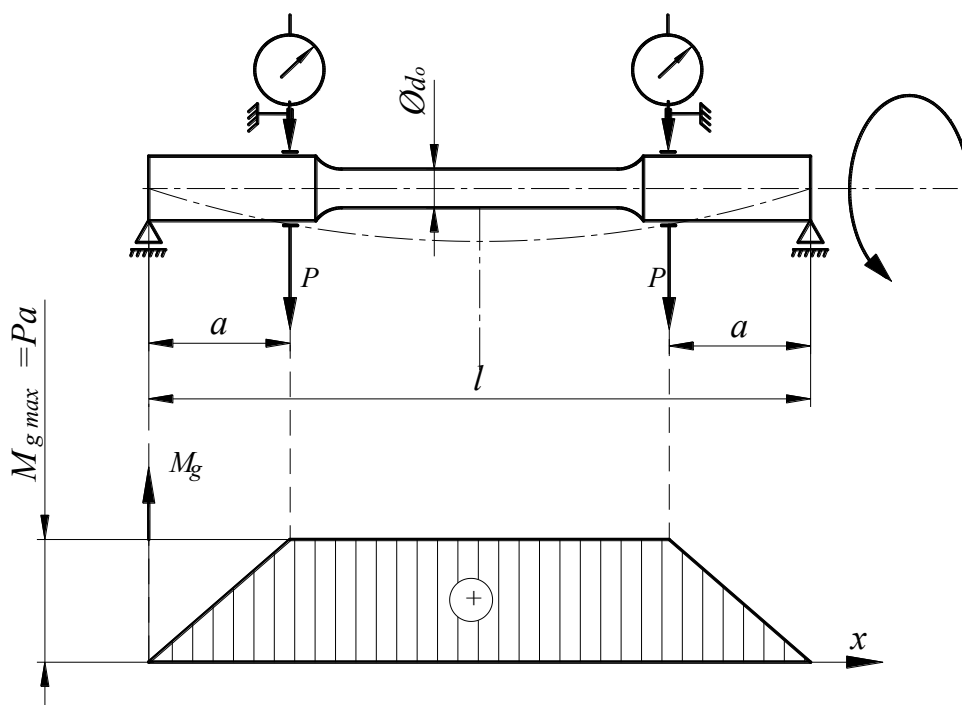


Rysunek 5.11. Schemat budowy maszyny zmęczeniowej.

## 5.12. Wyznaczanie wytrzymałości zmęczeniowej przy zginaniu obustronnym - próba przyspieszona (*Lehra*)

### 5.12.1 Schemat maszyny do badań zmęczeniowych

Wyznaczanie wytrzymałości zmęczeniowej przy obustronnym zginaniu – w tym również metodą *Lehra* – odbywa się na specjalnych maszynach zmęczeniowych. Zasada działania takiej maszyny zostanie omówiona na przykładzie maszyny zmęczeniowej *Schencka* – rys. 5.11.



Rysunek 5.12. Schemat próbki wraz z jej obciążeniami.

Badana próbka  $l$  zamocowana jest w tulejach zaciskowych 2. Jej obciążenie regulowanymi co do wartości siłami  $P$  (rys. 5.12) uzyskuje się za pomocą obciążnika  $Q$  (10) za pośrednictwem układu cięgien i dźwigni 8 oraz wahlowych łożysk wewnętrznych 3. Siły te tworzą wraz z reakcjami nieruchomych łożysk zewnętrznych 4 pary sił, wywołujące na całej długości środkowej części próbki czyste zginanie stałym momentem gnącym  $M_g = Pa$  (rys. 5.12). Odpowiadające temu momentowi ekstremalne wartości naprężeń określone są wzorem:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_g}{W_z} = \frac{32Pa}{\pi d_0^3} \text{ [MPa]}. \quad (5.20)$$

Zmiany obciążenia próbki odbywają się przez zmianę położenia obciążnika  $Q$  ( $10$ ) na dźwigni  $9$ , przy czym wymiary układu dźwigniowego są tak dobrane, że dla stosowanej próbki o średnicy pomiarowej  $d = 7,52$  mm, przesunięcie obciążnika  $Q$  na dźwigni o  $1$  cm powoduje zmianę wartości maksymalnych naprężeń gnących o  $\sigma_{\max} = 40$  MPa. Za pomocą silnika elektrycznego  $5$  i sprzęgła  $6$  oraz wałka giętkiego  $7$  próbka wraz z tulejami zaciskowymi wprawiona jest w ruch obrotowy, wskutek czego zginanie próbki następuje w coraz to innej płaszczyźnie. W ciągu jednego obrotu naprężenia występujące w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego próbki zmieniają się cyklicznie w – sposób ciągły. Naprężenie maksymalne  $\sigma_{\min} = |\sigma_{\min}|$  zmieniają swe znaki co pół obrotu.

W skład urządzenia przedstawionego schematycznie na rys. 5.11 wchodzi ponadto: przeciwwaga  $11$ , zaczep ryglujący dźwigniowy układ obciążający  $12$ , wyłącznik automatyczny  $13$ , olejowy układ chłodzący  $14$ , czujniki do pomiaru ugięć próbki  $15$  oraz licznik obrotów  $16$ .

### 5.12.2 Przeprowadzenie próby

W celu przeprowadzenia próby należy wykonać następujące czynności:

1. Sprawdzić zamocowanie czujników  $15$  do pomiaru ugięć próbki, w miejscach osadzenia łożysk wewnętrznych  $3$ .
2. Zwolnić zaczep ryglujący  $12$  układ obciążający (przez obrót w lewo dźwigni zaczepu, umieszczonej po lewej stronie skali obciążenia) i ustawić skale czujników na zerach.
3. Powiększając stopniowo obciążenie, notować odpowiednie wskazania obydwu czujników. Obciążenie zwiększamy przez obrót pokrętki znajdującego się obok skali obciążenia. Powodujemy przez to zmianę położenia obciążnika  $10$  na dźwigni  $9$ .  $1$  cm skali odpowiada zmianie maksymalnych naprężeń w poprzecznym przekroju próbki o  $40$  MPa. W początkowym zakresie naprężeń od  $0$  do  $120$  MPa (od  $0$  do  $3$  cm na skali obciążenia) pomiary należy przeprowadzić przy przyrostach naprężeń  $\Delta\sigma_{\max} = 40$  MPa; powyżej  $120$  MPa aż do wyraźnego wygięcia się próbki – co  $20$  MPa (co  $0,5$  cm na skali obciążenia). Po każdej zmianie obciążenia odczekać przed dokonaniem pomiaru wskazań czujników aż do ich ustalenia się. Układ pomiarowy podłączony do komputera zapisuje obciążenie i odpowiadające mu ugięcie próbki. Dzięki temu można sporządzić wykres Lehr'a naprężenie-ugięcie, **który należy wydrukować**.
4. Odciążyć układ do wartości zerowej obciążenia.
5. Zatrzymać maszynę (wyłączyć wszystkie urządzenia w kolejności odwrotnej niż przy włączaniu).

### 5.12.3 Określenie wytrzymałości zmęczeniowej przy zginaniu obustronnym $Z_{go}$

Dla określenia wytrzymałości zmęczeniowej  $Z_{go}$  należy:

- sporządzić wykres zależności średniej wartości strzałek ugięcia obciążonych przekrojów próbki  $f$  w zależności od odpowiadających maksymalnych naprężeń  $\sigma_{\max}$  w próbce;

- wyznaczyć punkt zagięcia wykresu;
- wyznaczyć wytrzymałość zmęczeniową  $Z_{go}$ , to znaczy wartość naprężenia odpowiadającą wyznaczonemu punktowi zagięcia wykresu.

### 5.13. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) definicję wytrzymałości zmęczeniowej oraz istotę próby przyspieszonej.
- 2) schemat i opis maszyny wytrzymałościowej;
- 3) schemat obciążenia próbki;
- 4) tabelkę z wynikami pomiarów oraz wykres zależności  $f=f(\sigma_{max})$  sporządzony na papierze milimetrowym;
- 5) wartość  $Z_{go}$  wyznaczoną z wykresu;
- 6) wartość wytrzymałości zmęczeniowej na rozciąganie  $Z_{ro}$ , odpowiadającą wyznaczonej wartości  $Z_{go}$ , wyznaczoną na podstawie zależności:  $Z_{ro} = 0,7 Z_{go}$ ;
- 7) uproszczony wykres *Smitha* (wartości  $R_m$  i  $R_e$  określić według danych zawartych w tabeli 5.2);  
wartość zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa  $x_z$  dla niesymetrycznego cyklu naprężeń:  
dla danych  $\sigma_m$  i  $\sigma_a$  podanych przez prowadzącego, w przypadku gdy: a)  $\sigma_a/\sigma_m = const$ , b)  $\sigma_m = const$ .

## Ćwiczenie 6

### WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W BELCE ZGINANEJ METODĄ TENSOMETRII OPOROWEJ

#### 6.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie naprężeń na podstawie pomiaru metodą tensometrii oporowej odkształceń belki zginanej. Pomiar odkształceń przeprowadzamy za pomocą tensometrów elektrooporowych, które podłączone są do mostka tensometrycznego. A zatem konieczne jest zapoznanie się z zasadą przeprowadzenia pomiarów odkształceń

Odształcenia na powierzchni belki mierzymy za pomocą tensometrów elektrooporowych. Otrzymując na drodze pomiaru odkształcenia w dwu prostopadłych kierunkach  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$ , a następnie obliczamy naprężenia jak i współczynnik Poissona  $\nu$  (patrz równania 6.12 i 6.15).

Do obliczeń naprężeń niezbędny jest moduł Younga, który zostanie wyznaczony poprzez pomiar ugięcia w środku belki za pomocą czujnika zegarowego. Znając wartość ugięcia i odpowiadające mu obciążenie oraz wykorzystując odpowiednie zależności analityczne (wzór na strzałkę ugięcia), obliczymy moduł Younga  $E$ .

#### 6.2. Wprowadzenie

Znane w wytrzymałości materiałów niektóre teorie oraz metody obliczeń elementów maszyn i konstrukcji opracowane są na podstawie wyników badań doświadczalnych.

Jedną z metod pomiarów odkształceń konstrukcji jest metoda tensometryczna. Na podstawie pomierzonych odkształceń, można obliczyć naprężenia za pomocą związków fizycznych tj. zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami  $\sigma$ - $\varepsilon$  dla płaskiego stanu naprężeń (PSN). We wspomnianej metodzie tensometrycznej wykorzystuje się mierniki, przyrządy do pomiaru odkształceń, które nazywamy tensometrami.

Spośród wielu typów tensometrów do najważniejszych należą tensometry z przekładnią mechaniczną lub optyczno-mechaniczną oraz – znajdujące szerokie zastosowanie – tensometryczne czujniki elektro-oporowe, za pomocą których mogą być dokonywane nie tylko pomiary statyczne, ale i dynamiczne. Tensometryczne czujniki oporowe nazywane są również tensometrami lub czujnikami oporowymi.

Poniżej, krótko omówiony zostanie sposób wykorzystania zmierzonych odkształceń do wyznaczenia naprężeń dla dwu następujących przypadków:

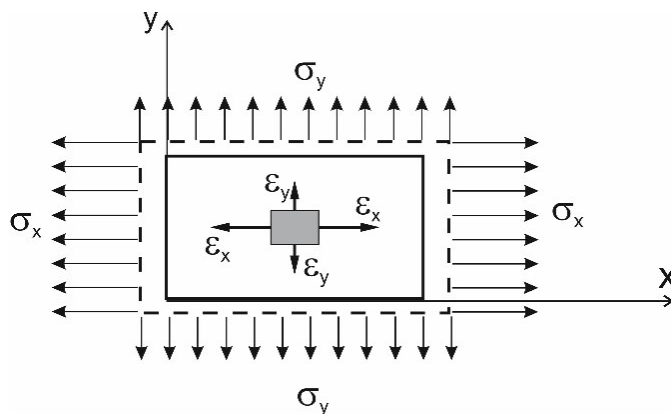
- element konstrukcyjny jest w jednokierunkowym stanie naprężenia;
- element konstrukcyjny znajduje się w płaskim dwukierunkowym stanie naprężenia.

W pomiarach tensometrycznych zakładamy, że badany element wykonany jest z materiału podlegającemu prawu *Hooke'a*. Tak więc, w przypadku gdy rozważymy występowanie

jednokierunkowego stanu napięcia, zależność pomiędzy odkształceniami  $\varepsilon$  i naprężeniami  $\sigma$  zapisujemy w następującej postaci:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (6.1)$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga.



Rysunek 6.1. Płaski stan naprężenia (PSN), element obciążony naprężeniami  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  (płytę po odkształceniu oznaczono linią przerywaną)

W przypadkach złożonych stanów naprężeń, np. gdy elementy konstrukcji są obciążone w dwóch kierunkach mamy, do czynienia z płaskim stanem naprężenia (rys. 6.1). W takim przypadku wykorzystuje się zależność naprężenie – odkształcenia dla PSN, które najłatwiej można wyprowadzić stosując zasadę superpozycji. Zasada superpozycji pozwala rozpatrzeć odkształcenia wywołane naprężeniami  $\sigma_x$ , a następnie odkształcenia wywołane naprężeniami  $\sigma_y$  i nałożyć (dodać) na siebie efekty obu stanów. Jeżeli odkształcenia w kierunku osi  $x$  wywołane tylko naprężeniami  $\sigma_x$  oznaczymy jako  $\varepsilon'_x$ , natomiast przez  $\varepsilon''_x$  oznaczymy odkształcenia wywołane tylko naprężeniami  $\sigma_y$ , to wykorzystując metodę superpozycji odkształcenia wywołane płaskim stanem naprężeń tj. jednoczesnym działaniem naprężeń  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x. \quad (6.1)$$

Analogiczną zależność na odkształcenia można zapisać dla kierunku  $y$ :

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y. \quad (6.2)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a działanie tylko naprężeń  $\sigma_x$  powoduje odkształcenie w kierunku osi  $x$ , które jest zgodne z równaniem:

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (6.3)$$

Przy rozciąganiu elementu odkształceniu wzdłużnemu towarzyszy odkształcenie poprzeczne (zwężenie), należy zatem jeszcze obliczyć odkształcenie w kierunku osi  $y$ . Odkształcenie to obliczamy wykorzystując zależność między odkształceniem podłużnym i poprzecznym określonym za pomocą współczynnika odkształcalności poprzecznej, zwanego liczbą Poissona  $\nu$ , która zgodnie z definicją jest stosunkiem odkształceń poprzecznych do kierunku obciążenia i odkształceń w kierunku obciążenia:

$$\nu = -\frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_x}, \quad (6.4)$$

stąd po przekształceniu i wykorzystaniu (6.3) odkształcenia w kierunku osi  $x$  wywołane tylko naprężeniami  $\sigma_y$  wynoszą:

$$\varepsilon'_{y'} = -\nu\varepsilon'_{x'} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}. \quad (6.5)$$

Zakładając działanie tylko naprężeń  $\sigma_y$  otrzymujemy

$$\varepsilon''_{y'} = \frac{\sigma_y}{E}, \quad (6.6)$$

analogicznie ich działanie w kierunku osi  $x$  wywołane naprężeniami  $\sigma_y$  możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon''_{x'} = -\nu\varepsilon''_{y'} = -\nu\frac{\sigma_y}{E}. \quad (6.7)$$

Wykorzystując zasadę superpozycji tj. równania (6.1) i (6.2) podstawiając do nich wyznaczone zależności (6.3) oraz (6.5) do (6.7) znajdziemy odkształcenia będące efektem działania naprężeń w dwu prostopadłych kierunkach - otrzymamy prawo Hooke'a dla dwukierunkowego płaskiego stanu naprężenia. Zależność tę zapisać możemy w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Związki (6.8) można tak przekształcić, aby wyznaczyć naprężenia  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  w funkcji odkształceń  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$ . Po pomnożeniu równań 6.8 przez  $E$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu\sigma_y, \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu\sigma_x. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Po pomnożeniu drugiego równania (6.9) przez  $\nu$ :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu\sigma_y, \\ E\nu\varepsilon_y &= \nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x. \end{aligned} \quad (6.10)$$

oraz dodając stronami równania (6.10), otrzymujemy:

$$E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = (1 - \nu^2)\sigma_x, \quad (6.11)$$

skąd łatwo można obliczyć naprężenia  $\sigma_x$  w funkcji odkształceń  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$ . Postępując podobnie (po pomnożeniu pierwszego równania (6.9) przez  $\nu$  i dodaniu stronami) obliczamy  $\sigma_y$ . Zatem w przypadku dwukierunkowego stanu napięcia naprężenia  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  wynoszą:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Przy obliczaniu naprężeń  $\sigma_x$  lub  $\sigma_y$  odkształcenia w kierunkach prostopadłych mają przeciwne znaki. Jeżeli naprężenia w kierunku  $x$  powodują rozciąganie (wydłużenie elementu) to odkształcenia w tym kierunku mają wartość dodatnią, a odkształcenia w kierunku prostopadłym do kierunku  $x$  mają **wartość ujemną (wymiar końcowy mniejszy od początkowego)**.

**Uwaga:** W ćwiczeniu rozważamy element płaskownika, który jest belką poddaną czystemu zginaniu, wtedy naprężenia  $\sigma_y$  (naprężenia w kierunku poprzecznym do osi belki) są równe zero. Zatem, mając dane odkształcenia  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  na podstawie (6.12b) można obliczyć liczbę Poisson'a (potwierdzenie równania (6.4)), gdyż mamy:

$$0 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x). \quad (6.13)$$

Ponieważ stałe materiałowe tj. moduł Younga  $E$  i liczba Poisson'a  $\nu$  są różne od zera to:

$$0 = \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x. \quad (6.14)$$

Wyznaczając  $\nu$  z rów. 6.14, mamy:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}, \quad (6.15)$$

gdzie  $\varepsilon_y$  to odkształcenia poprzeczne w stosunku do osi belki, a  $\varepsilon_x$  wzdłużne.

Równanie (6.15) wykorzystane zostanie do wyznaczenia liczby Poisson'a materiału belki wykorzystując zmierzone jej odkształcenia.

### 6.3. Budowa tensometrycznego czujnika oporowego i istota pomiarów odkształceń

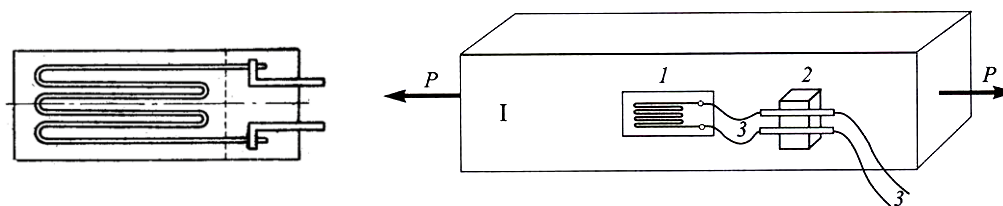
W miarę rozwoju techniki metod pomiarowych oraz technologii (lub nanotechnologii) zmieniły się metody pomiarów i sposoby wykonywania tensometrów. Na rys. 6.2 przedstawiono klasyczny tensometr oporowy (jest to czujnik wężykowy stosowany do dzisiaj np. przy pomiarach odkształceń betonu). Podstawowym elementem tego czujnika jest cienki drucik o średnicy  $0,02 \pm 0,05$  mm, ułożony w szereg pętli o długości  $3 \pm 25$  mm i naklejony na prostokątny arkusik  $l$  z cienkiego papieru lub celuloиду. Do końców drucika przylutowane są miedziane przewody  $3$  o średnicy  $0,1 \pm 0,2$  mm, umożliwiające włączenie czujnika w obwód elektryczny. Przewody te powinny być przymocowane do wspornika  $2$  zabezpieczającego czujnik przed uszkodzeniem mechanicznym.

W przypadku pomiarów odkształceń konstrukcji metalowych lub kompozytowych stosujemy tensometry foliowe pokazane na rys. 6.3. W tensometrach foliowych rolę drucika przewodzącego prąd pełni folia metalowa o grubości  $0,0025 - 0,025$  mm, folia ta nakładana jest w podobny sposób jak wykonuje się obwody drukowane, a wstążka metalowa formowana jest metodą trawienia.

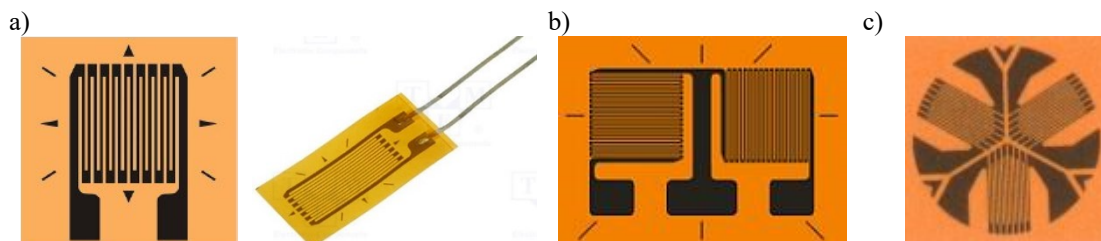
a)

b)





Rysunek 6.2. Tradycyjny tensometr wężykowy (a) i sposób mocowania czujnika oporowego (b)



Rysunek 6.3. Obecnie stosowane tensometry foliowe: jednokierunkowe (a), dwukierunkowe (b) i rozeta tensometryczna (c)

Czujnik tensometryczny przykleja się specjalnym klejem bezpośrednio na powierzchni badanej próbki lub badanego elementu konstrukcji. Po wyschnięciu kleju odkształcenia czujnika są takie same jak elementu, na który jest on przyklejony. Okazuje się, że w pewnych granicach odkształceń względny przyrost oporu czujnika  $\Delta R/R$  jest wprost proporcjonalny do odkształcenia względnego  $\varepsilon$ . Zależność pomiędzy zmianą odkształcenia (zmiana długości do długości początkowej) a zmianą oporu wynika z faktu, że opór w przewodniku zmienia się wraz ze zmianą jego długości. Zmiana długości przewodnika, a zatem również jego oporu może być również wywołana zmianą temperatury otoczenia. Wpływ zmiany temperatury podczas pomiarów eliminuje się poprzez stosowanie tensometrów kompensacyjnych, które zwykle naklejane są na nieobciążoną płytkę z takiego samego materiału. Tensometry kompensacyjne naklejone na nieobciążonych elementach zmieniają swoją oporność wraz ze zmianą temperatury otoczenia. Wyznaczona zmiana oporu w tensometrze kompensacyjnym odejmowana jest od zmiany oporu w tensometrze pomiarowym (naklejonym na elemencie badanym, obciążonym) – w ten sposób zmiany temperatur podczas badań nie wpływają na wynik pomiarów.

Reasumując, można powiedzieć, że mierząc przyrost oporu można określić odkształcenie  $\varepsilon$ , a następnie obliczyć naprężenie. Rysunek 6.2 ilustruje omówioną zasadę pomiarową odkształceń dla przypadku jednokierunkowego stanu naprężenia. Chcąc zmierzyć odkształcenia w kierunku działania siły  $P$ , należy na badany element nakleić tensometryczny czujnik oporowy  $I$  tak, aby jego pętle były równoległe do kierunku mierzonego odkształcenia. Przewody  $3$  doprowadzone są do mostka tensometrycznego umożliwiającego dokonanie pomiaru odkształceń badanego elementu. Czujniki raz naklejone nie nadają się już do ponownego użytkowania na innych próbkach.

#### 6.4. Stała $K$ tensometrycznego czujnika oporowego

Tensometr naklejony na konstrukcję po jej obciążeniu odkształca się tak jak badany element przy czym zmieniają się jego wymiary oraz opór elektryczny tensometru. Zmiana oporu elektrycznego tensometru jest proporcjonalna do jego odkształceń, a współczynnikiem umożliwiającym przeliczenie zmiany oporu na odkształcenie jest stała  $K$  tensometru. Wartość stałej  $K$  określa się doświadczalnie. Z dużej partii jednakowo wykonanych czujników wybiera się losowo pewną ich liczbę do badań, nakleja

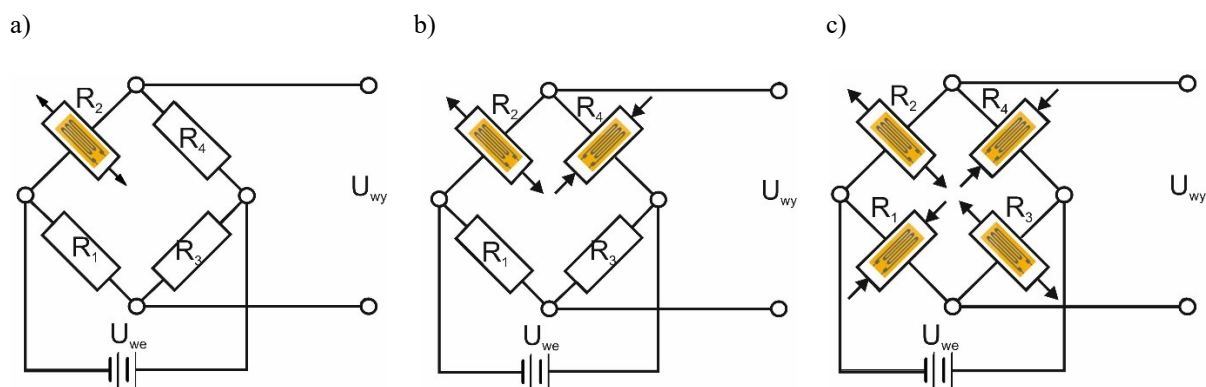
się je na próbki wzorcowe, które następnie doznają ściśle określonych odkształceń i na tej podstawie określa się statystycznie stałą  $K$  dla całej partii czujników. Odkształcenie względne  $\varepsilon$  jest więc wprost proporcjonalne do względnego przyrostu oporu  $\Delta R/R$ . Stała  $K$  zależy od materiału, z jakiego wykonany jest drut pomiarowy czujnika; dla tensometrów wykonanych np. z konstantanu (stop o zawartości 60% Cu i 40% Ni)  $K=2,1 \div 2,4$ .

## 6.5. Zasady pomiaru odkształceń metodą tensometrii oporowej

Zasada pomiaru odkształceń, a dokładnie zmiany oporu w czujniku tensometrycznym lub czujnikach tensometrycznych związanych z jego lub ich wydłużeniem lub skróceniem, wykorzystuje mostek tensometryczny. Tensometry podłącza się do układu elektrycznego zwanego mostkiem. Najczęściej do pomiarów wykorzystuje się mostek Wheatsona, w którym pomiar odbywa się poprzez jego równoważenie – metoda zerowa, lub poprzez pomiar napięcia wyjściowego – metoda wychyłowa. Do mostka, składającego się z czterech gałęzi z wpiętymi opornikami lub tensometrami (rys. 6.4) do dwóch punktów leżących po przekątnej przykładamy napięcie  $U_{we}$ , a w dwóch pozostałych punktach wpinamy Galwanometr sprawdzający równowagę (metoda zerowa) lub czujnik napięcia (metoda wychyłowa). W przypadku metody zerowej jeden z oporników w układzie musi być opornikiem nastawnym, tak aby zmiana rezystancji tensometru spowodowana zmianą odkształceń mogła być zrównoważona. Zmiana nastawień opornika nastawnego (potencjometru) traktujemy jako zmianę rezystancji w czujniku elektrooporowym (tensometrze) czyli jego odkształceń, a więc odkształceń elementu, do którego jest przyklejony. W metodzie wychyłowej dokonujemy pomiaru napięcia na wyjściu  $U_{wy}$ , a ponieważ zmiana tego napięcia skorelowana jest ze znanym napięciem wejścia  $U_{we}$  i rezystancjami oporników w układzie to zmiany napięcia wyjściowego wyznaczone ze wzoru:

$$U_{wy} = \left( \frac{R_1}{R_3 + R_1} - \frac{R_2}{R_4 + R_2} \right) U_{we}, \quad (6.16)$$

związane są ze zmianami oporów tensometru lub tensometrów.



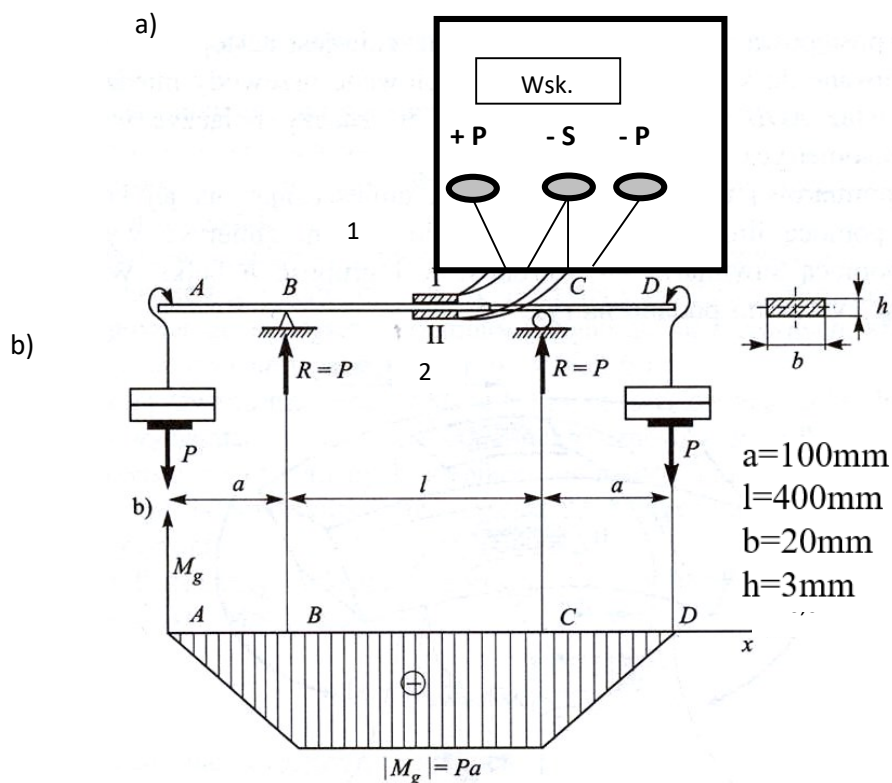
Rysunek 6.4. Mostek tensometryczny – połączenie tensometrów w układzie ćwierć-mostka (a), pół-mostka (b) i pełnego mostka (c)

Pomiary mogą być dokonywane w różnych układach, najslabszy sygnał otrzymujemy w przypadku ćwierć-mostka (rys. 6.4a), wtedy mamy tylko jeden tensometr i trzy znane rezystory. Największy sygnał otrzymuje się w przypadku zastosowania pełnego mostka (rys. 6.4c) – w każdej gałęzi mostka wpięty

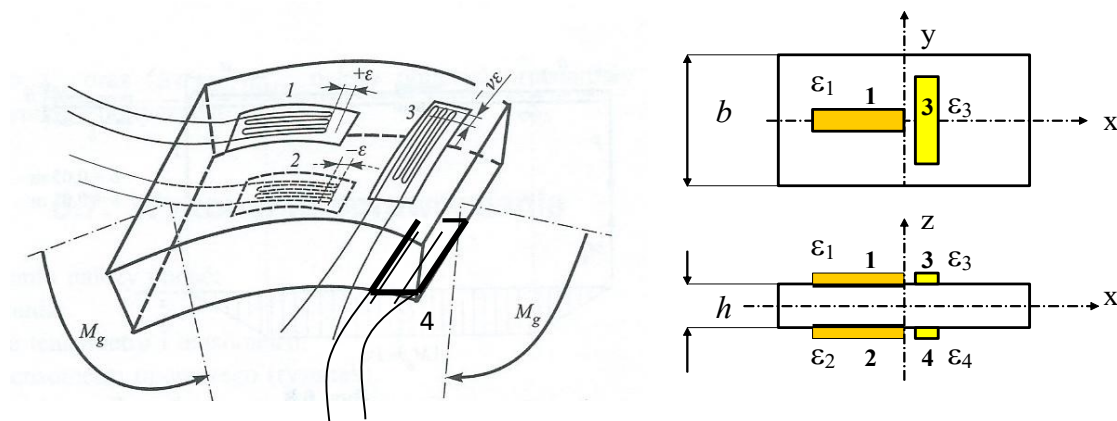
jest tensometr. W przypadku gdy w układzie mamy więcej niż jeden tensometr tj. dwa w przypadku półmostka (rys. 6.4b) lub cztery w przypadku pełnego mostka (rys. 6.4c) do wyznaczenia odkształceń konieczna jest znajomość relacji pomiędzy zmianami rezystancji w tensometrach.

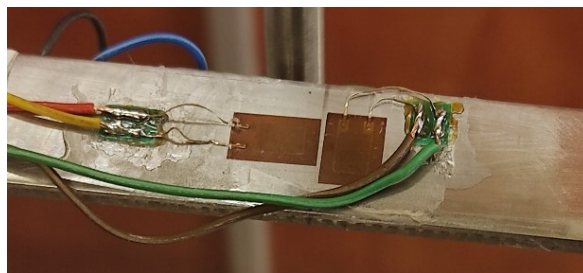
## 6.6. Wykonanie ćwiczenia

Schemat obciążenia belki, wykres momentów gnących, usytuowanie czujników pomiarowych oraz sposób ich przyłączenia do mostka tensometrycznego przedstawiono na rys.6.5.



Rysunek 6.5. Schemat stanowiska pomiarowego belki poddanej czystemu zginaniu, a) schemat mostka, b) widok belki obciążonej siłami P wraz połączeniami tensometrów





Rysunek 6.6. Schemat połączenia tensometrów do mostka oraz widok czujników (tensometrów) naklejonych na górnej powierzchni belki

Badana belka ma przekrój prostokątny, a więc przekrój z poziomą osią symetrii, a zatem odkształcenia wzdłużne włókien górnych  $\varepsilon_1$  i dolnych  $\varepsilon_2$  są co do wartości bezwzględnej sobie równe – powierzchnia górna jest rozciągana ( $\varepsilon_1 = +\varepsilon_x > 0$ ), a powierzchnia dolna jest ściskana ( $\varepsilon_2 = -\varepsilon_x < 0$ ). Gdy po dwu przeciwległych stronach belki nakleimy po jednym czujniku pomiarowym (rys. 6.5 i 6.6), a następnie każdy z czujników włączymy w odpowiednie gałęzie mostka (pierwszy w lewą gałąź  $R+\Delta R$ , a drugi w prawą gałąź  $R-\Delta R$  – rys.6.7), wówczas na skali mostka tensometrycznego odczytamy sumę wartości bezwzględnych odkształceń powierzchni dolnej i górnej. W rozpatrywanym przypadku odczytane odkształcenia będą dwa razy większe niż te, które znajdują się na każdej ze stron belki.

Zatem, w celu wyznaczenia odkształceń wzdłużnych i poprzecznych np. na powierzchni górnej belki, możemy posłużyć się następującymi równaniami:

- dla włókien wzdłużnych (w kierunku osi x)  $\varepsilon_x$ 

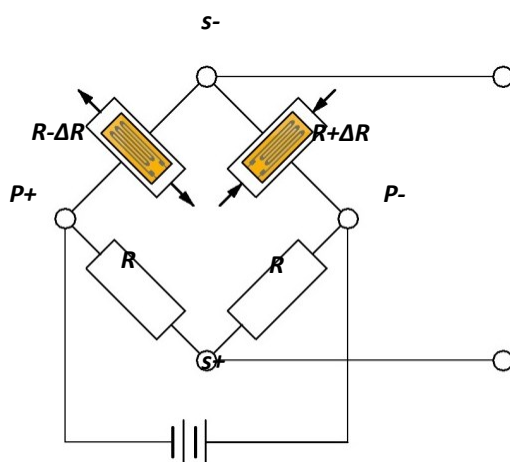
$$\varepsilon_{wzd} = \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 - (-\varepsilon_2)}{2} = \frac{2\varepsilon_1}{2}, \quad (6.17)$$

- odkształcenia porzeczne (w kierunku osi y)  $\varepsilon_y$ 

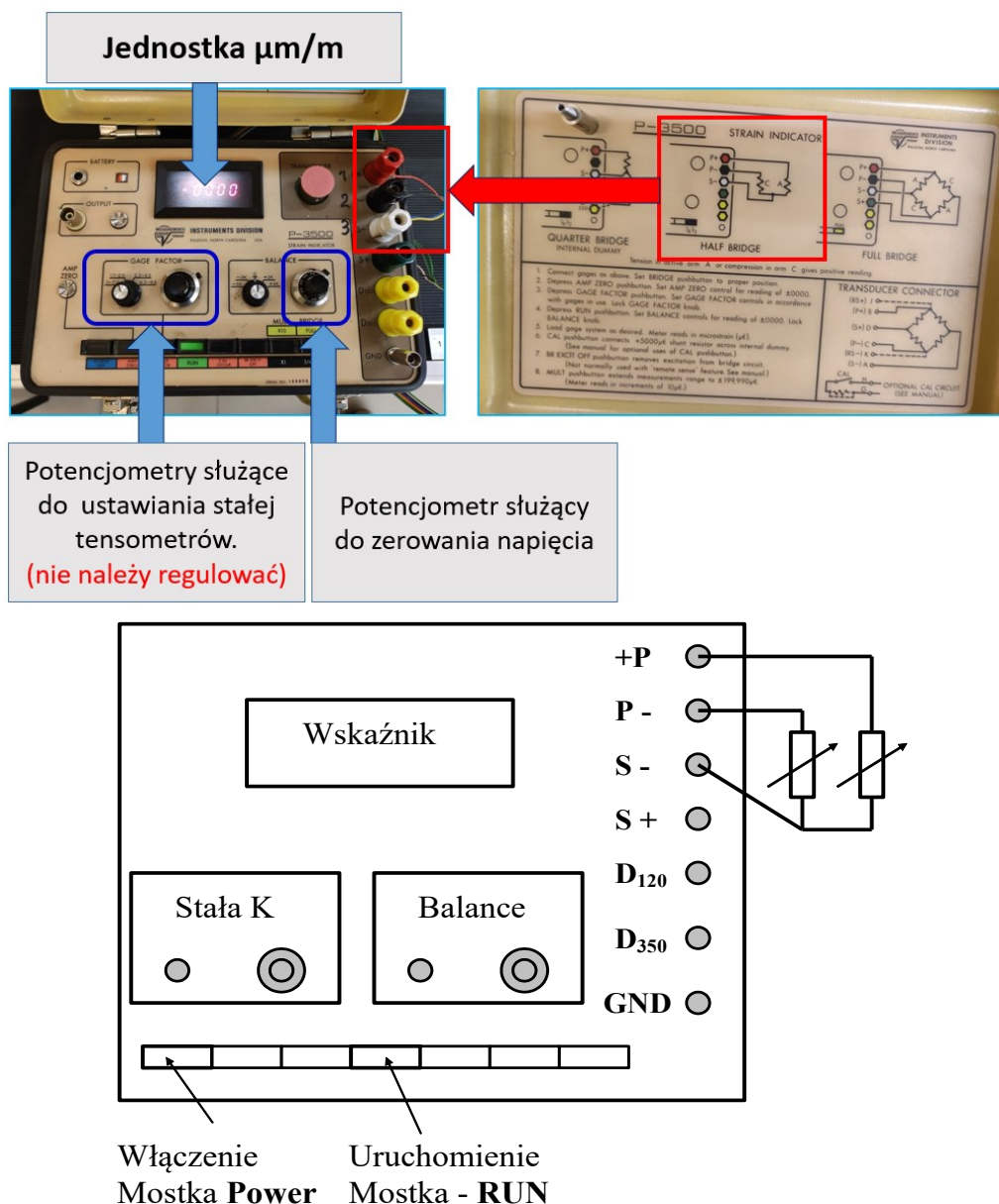
$$\varepsilon_{pop} = \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_3 - (-\varepsilon_4)}{2} = \frac{2\varepsilon_3}{2}. \quad (6.18)$$

Czujniki przyklejone są na tej samej belce, czyli znajdują się w jednakowych warunkach cieplnych. Przyrosty odkształceń badanych włókien wynikające z ewentualnych zmian temperatury nie naruszają równowagi mostka. Wyeliminowany jest więc wpływ temperatury na pomiar odkształceń mechanicznych. W wykonywanym ćwiczeniu każdy z czujników spełnia więc jednocześnie rolę czujnika pomiarowego i kompensacyjnego. Powierzchnie, do których przyklejamy czujniki, powinny być możliwie najdokładniej wygładzone drobnym papierem ściernym, odtuszczone acetonem, następnie pokryte cienką warstwą kleju. Klej używany do tego celu musi dobrze wiązać czujnik z badaną powierzchnią, powinien dobrze znosić temperaturę próby, musi szybko schnąć i być odporny na wilgoć. Tensometr należy posmarować cienką warstwą kleju i przykleić w odpowiednim miejscu zgodnie z kierunkiem badanego odkształcenia. Po wyciśnięciu spod czujnika nadmiaru kleju należy czujnik przez pewien czas dociskać poprzez miękką podkładkę. Dobrze jest używać do tego celu specjalnych zacisków. Po pewnym czasie (np. po 1h) należy zaciski zdjąć i suszyć czujnik jeszcze przez kilka godzin. Zastosowanie suszarki z wentylatorem znacznie skraca czas suszenia. Po wysuszeniu przyklejonych do belki czujników 1 i 2 (rys. 6.5) do końcówek (czujników) należy przylutować

izolowane przewody miedziane. Czujniki powinny być zabezpieczone dodatkowo przed urazami mechanicznymi i wilgocią. Dla osłony przed wilgocią można użyć wosku lub specjalnego kleju. Proces przyklejania czujników jest czasochłonny, a więc badana belka służąca do ćwiczeń studenckich ma czujniki przyklejone na stałe. Na powierzchni górnej i dolnej rozważanej belki (rys. 6.5 i 6.6) w połowie jej rozpiętości naklejone zostały po dwa tensometry, w taki sposób, że po obu stronach mierzone są zarówno odkształcenia wzdłużne (wzdłuż belki) jak i poprzeczne. Rysunek 6.7 przedstawia schemat elektryczny połączenia tensometrów. Do układu elektrycznego tensometry podłączane są parami, tj. dwa tensometry wzdłużne lub dwa tensometry poprzeczne. Urządzenie realizujące zadania przedstawionego układu elektrycznego to wykorzystywany w ćwiczeniu mostek tensometryczny (mostek Wheatstona), który przedstawiony jest na rys. 6.8. Sygnał z mostka jest wzmacniany i przekazywany na panel odczytowy, który pokazuje odkształcenia  $\epsilon$  w jednostkach [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ].




Rysunek 6.7. Schemat mostka Wheatstona dla tensometrów rejestrujących przyrost oporności spowodowanych odkształceniami zgodnymi z wektorami sił

Rysunek 6.8. Mostek tensometryczny i jego schemat <https://www.msn.com/pl-pl/feed>

Aby przeprowadzić pomiar podłączmy jedną parę tensometrów np. wzdłużnych i odczytujemy wartości na mierniku. Obciążamy belkę kolejno siłami od 0 do  $P = 15 \text{ N}$  co  $5 \text{ N}$ , a następnie odciążamy odejmując po  $5 \text{ N}$  i zapisujemy wskazania mostka w tabeli 6.1. Przyrostowe prowadzenie badań pozwala wyznaczyć 6 zmian odkształceń dla przyjętych przyrostów obciążenia. Sumę odkształceń wzdłużnych włókien górnych i dolnych otrzymaną z pomiaru sześciu wielkości przy przyroście siły  $\Delta P = 5 \text{ N}$  należy podzielić przez dwa następnie aby otrzymać średnią z sześciu pomiarów przyrostów odkształceń dodatkowo podzielić przez 6. Odkształcenie wzdłużne  $\varepsilon_{wzd} = \varepsilon_x$ , pomierzone w jednostkach  $[\mu\text{m}/\text{m}]$  należy pomnożyć przez  $10^{-6}$  (tzn.  $\varepsilon = \dots [\mu\text{m}/\text{m}] = \dots \cdot 10^{-6}$ ). A zatem, średnie odkształcenie włókien w jednostkach odkształceń wynosi:

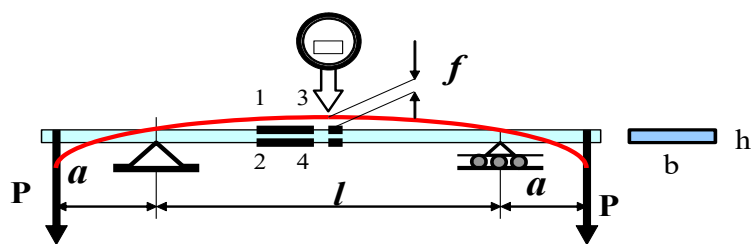
$$\varepsilon_{wzd} = \frac{\sum A_i}{12 \cdot 10^6} \quad (6.19)$$

Tabela 6.1. Wyniki pomiarów ugięcia belki oraz odkształceń wzdluznych.

L.p.	Obciążenie $P$ [N]	Wskazania czujnika zegarowego $f_i$ [mm]	Przyrost wskazań czujnika zegarowego $ f_{i+1} - f_i $ [mm]	Wskazania na skali odkształceń względnych $\varepsilon_{xi}$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Przyrost wskazań na skali odkształceń względnych przy zmianie siły $\Delta P = 5$ N
1	0	$f_1 =$	-----	$\varepsilon_{x1} =$	-----
2	5	$f_2 =$		$\varepsilon_{x2} =$	$ \varepsilon_{x2} - \varepsilon_{x1}  =$
3	10	$f_3 =$		$\varepsilon_{x3} =$	$ \varepsilon_{x3} - \varepsilon_{x2}  =$
4	15	$f_4 =$		$\varepsilon_{x4} =$	$ \varepsilon_{x4} - \varepsilon_{x3}  =$
5	10	$f_5 =$		$\varepsilon_{x5} =$	$ \varepsilon_{x5} - \varepsilon_{x4}  =$
6	5	$f_6 =$		$\varepsilon_{x6} =$	$ \varepsilon_{x6} - \varepsilon_{x5}  =$
7	0	$f_7 =$		$\varepsilon_{x7} =$	$ \varepsilon_{x7} - \varepsilon_{x6}  =$
		$\sum  f_{i+1} - f_i $ [mm]			$\sum A_i$ ..... [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]

Przy obciążeniu belki obserwujemy stosunkowo duże jej ugięcia. Największe ugięcia występują w środku belki, wartość ugięcia nazywamy strzałką ugięcia.

Podczas pomiaru odkształceń dodatkowo mierzymy strzałkę ugięcia belki  $f$  w środku jej rozpiętości za pomocą czujnika zegarowego z wyświetlaczem o dokładności 0,001 mm (rys. 6.9).

Rysunek 6.9. Sposób pomiaru strzałki ugięcia  $f$  w środku rozpiętości belki

Pomierzone wartości ugięcia  $f$  zapisujemy również w tabeli 6.1. Średnia wartość strzałki ugięcia w środku belki wyznaczona na podstawie sumy sześciu pomiarów wynosi:

$$f_{sr} = \frac{1}{6} \sum |f_{i+1} - f_i| \quad (6.20)$$

Wartość strzałki ugięcia w środku belki można obliczyć ze wzoru:

$$f_{sr} = \frac{\Delta M_g \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J_{zc}} = \frac{\Delta P \cdot a \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J_{zc}} \quad (6.21)$$

Mając daną wartość ugięcia, wymiary belki oraz obciążenie na podstawie wzorów (6.20) oraz (6.21) można obliczyć wartość modułu Younga ze wzoru:

$$E = \frac{\Delta M_g \cdot l^2}{8 \cdot f_{sr} \cdot J_{zc}} = \frac{\Delta P \cdot a \cdot l^2}{8 \cdot f_{sr} \cdot J_{zc}} \quad (6.22)$$

Tak obliczony moduł Younga razem z wcześniej wyznaczonymi odkształceniami wzdłużnymi posłuży do wyznaczenia naprężeń wzdłużnych. W przypadku zginania zgodnie z hipotezą płaskich przekrojów (Bernoulego) rozciąganiu ulegają włókna zewnętrzne (górne) i naprężenia można obliczyć ze wzoru:

$$(\Delta \sigma_g)_{dośw} = E \cdot \varepsilon_{wzd} \quad (6.23)$$

Dla sprawdzenia otrzymanych wyników, naprężenia możemy również wyznaczyć ze wzorów znanych z wytrzymałości materiałów. Teoretyczny przyrost naprężeń gnących wynosi:

$$(\Delta \sigma_g)_{teoret} = \frac{\Delta M_g}{W_z} = \frac{\Delta P \cdot a}{W_z} \quad (6.24)$$



Naprężenia spowodowane przyrostem siły  $\Delta P=5$  N ze wzorów (6.23) oraz dla porównania na podstawie (6.24). Po porównaniu wyników okazuje się, że pomijając błędy pomiaru otrzymujemy prawie ten sam wynik. Dla pokazania różnicy otrzymane ze wzorów (6.23) i (6.24) wyniki wykorzystujemy do obliczenia procentowego błędu pomiaru w stosunku do wyniku teoretycznego.

Na górnej i dolnej powierzchni belki przyklejone są oprócz czujników 1 i 2, czujniki 3 i 4 za pomocą, których mierzymy odkształcenia poprzeczne  $\varepsilon_y = \varepsilon_{pop}$ . Pomiar odkształceń poprzecznych przeprowadzamy podobnie jak odkształceń wzdłużnych  $\varepsilon_x = \varepsilon_{wzd}$  i zamieszczamy w tabeli 6.2

Tabela 6.2. Wyniki pomiarów odkształceń poprzecznych.

L.p.	Obciążenie $P$ [N]	Wskazania na skali odkształceń względnych $\varepsilon_{yi}$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	Przyrost wskazań na skali odkształceń względnych przy przyroście siły $\Delta P = 5$ N
1	0	$\varepsilon_{y1} =$	-----
2	5	$\varepsilon_{y2} =$	$ \varepsilon_{y2} - \varepsilon_{y1}  =$
3	10	$\varepsilon_{y3} =$	$ \varepsilon_{y3} - \varepsilon_{y2}  =$
4	15	$\varepsilon_{y4} =$	$ \varepsilon_{y4} - \varepsilon_{y3}  =$
5	10	$\varepsilon_{y5} =$	$ \varepsilon_{y5} - \varepsilon_{y4}  =$
6	5	$\varepsilon_{y6} =$	$ \varepsilon_{y6} - \varepsilon_{y5}  =$
7	0	$\varepsilon_{y7} =$	$ \varepsilon_{y7} - \varepsilon_{y6}  =$
			$\sum \Delta_2 \dots \dots \dots \mu\text{m}/\text{m}$

Sumę odkształceń poprzecznych włókien górnych i dolnych otrzymaną z pomiaru siedmiu wielkości przy przyroście siły o  $\Delta P=5$  N należy podzielić przez dwa oraz aby otrzymać średnią z sześciu przyrostów odkształceń dodatkowo podzielić przez 6. Odkształcenie poprzeczne  $\varepsilon_{pop} = \varepsilon_y$ , pomierzone w jednostkach [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ] należy jeszcze pomnożyć przez  $10^{-6}$  (tzn.  $\varepsilon = \dots$  [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]  $= \dots \cdot 10^{-6}$ ) i w efekcie średnie odkształcenie włókien wynosi (znak minus oznacza skrócenie poprzeczne belki):

$$\varepsilon_{pop} = - \frac{\sum \Delta_2}{12 \cdot 10^6} \quad (6.25)$$

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów, tj. mając wyznaczone odkształcenia wzdłużne i poprzeczne możemy wyznaczyć liczbę Poisson'a, która wyraża się stosunkiem jednostkowego odkształcenia poprzecznego  $\varepsilon_{pop}$  do jednostkowego odkształcenia wzdłużnego  $\varepsilon_{wzd}$ :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_{pop}}{\varepsilon_{wzd}} \quad (6.26)$$

Kolejność postępowania przy wykonaniu ćwiczenia jest następująca:

1. Podłączamy tensometry wzdłużne
  - a. wtyk czerwony (przewód czerwony) podłączamy do zacisku czerwonego na mostku (+P).
  - b. wtyk czarny (przewód czarny) podłączamy do zacisku czarnego na mostku (-P).
  - c. wtyk biały (przewód biały i niebieski) podłączamy do zacisku białego na mostku (-S).
2. Włączamy mostek przyciskiem „RUN”.
3. Wyzerować czujnik przemieszczeń.
4. Odczytać wskazanie mostka i czujnika przemieszczeń dla obciążenia 0 N i zapisać w odpowiedniej tabeli.
5. Belkę obciążyć z obu stron siłami  $P=5$  N, kładąc na zawieszono na jej końcach szalki odpowiednie ciężarki. Odczytujemy wskazania mostka i ugięcie belki z czujnika przemieszczeń.
6. Przeprowadzić analogicznie pomiary kolejno dla sił  $P$  równych 10, 15, 10, 5 i 0 (wyrażonych w niutonach), notując jednocześnie wyniki pomiarów w tabl. 6.1.
7. Wyłączyć czujnik przemieszczenia i mostek
8. Podłączyć tensometry poprzeczne
  - a) wtyk czerwony (przewód biały) podłączamy do zacisku czerwonego na mostku
  - b) wtyk czarny (przewód brązowy) podłączamy do zacisku czarnego na mostku (-P)
  - c) wtyk biały (przewody zielone) podłączamy do zacisku białego na mostku (-S)
9. Włączyć mostek przyciskiem „RUN”
10. Powtórzyć czynności opisane w pkt. 4-6, przy czym odczytujemy tylko wskazania mostka
11. Wyniki pomiarów zanotować w tabl. 6.2.
12. Obliczyć moduł Younga na podstawie pomiaru ugięcia belki  $f$  i znanych wartości obciążenia  $\Delta P$  oraz wymiarów belki wg wzoru (6.22).
13. Mając moduł Younga i odkształcenia wzdłużne wyznaczyć doświadczalną wartość naprężeń dla przyrostu siły  $\Delta P = 5$  N.
14. Obliczyć naprężenia gnące dla siły  $P = 5$  N ze wzorów teoretycznych i porównać z wynikiem otrzymanym na drodze doświadczalnej licząc względny błąd pomiaru.
15. Mając odkształcenia wzdłużne  $\varepsilon_{wzd}=\varepsilon_x$  oraz poprzeczne  $\varepsilon_{pop}=\varepsilon_y$ , obliczyć liczbę Poisson’a.
16. Obliczyć przyrost naprężenia, korzystając ze wzoru (umieszczonego w sprawozdaniu) dla płaskiego stanu naprężenia (uwaga: odkształcenia poprzeczne są ujemne).

## 6.7. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. Zasadę pomiaru odkształceń poprzecznych metodą tensometrii oporowej.
2. Schemat obciążenia belki, wykres momentów gnących oraz zestawienie wszystkich danych potrzebnych do obliczeń.
3. Wyniki pomiarów zestawione w tabl. 6.1 oraz 6.2.
4. Moduł Younga badanej belki na podstawie pomiaru ugięcia.
5. Obliczenia wartości  $(\Delta\sigma_g)_{dośw}$ ,  $(\Delta\sigma_g)_{teoret}$  dla przyrostu siły  $\Delta P = 5$  N oraz określenie błędu pomiaru, pomiędzy wartościami obliczonymi teoretycznie i doświadczalnie.
6. Wyznaczenie liczby Poissona materiału badanej belki.

## Ćwiczenie 7

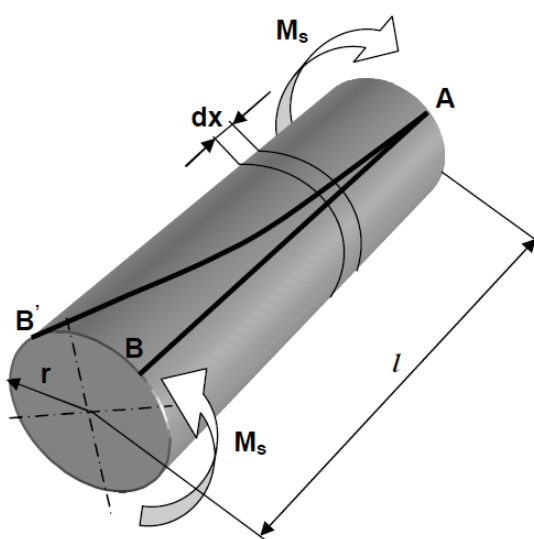
### WYZNACZANIE MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI POSTACIOWEJ $G$ PRZEZ POMIAR KĄTA SKRĘCENIA PRĘTA O PRZEKROJU KOŁOWYM I PROSTOKĄTNYM

#### 7.1. Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie doświadczalnej wartości modułu sprężystości postaciowej (modułu Kirchhoffa)  $G$  przez pomiar kąta skręcenia dwóch próbek stalowych: pręta o przekroju kołowym oraz pręta o przekroju prostokątnym. Wyniki doświadczalne należy porównać z teoretycznymi wartościami modułu Kirchhoffa stali. Dla maksymalnych rozpatrywanych wartości momentów skręcających należy wyznaczyć maksymalne naprężenia skręcające oraz porównać ich z naprężeniami dopuszczalnymi na skręcanie ( $k_s$ ).

#### 7.2. Pręt o przekroju kołowym.

W pręcie o przekroju kołowym, poddanym obciążeniu momentem skręcającym działającym na końcach, powstaje stan naprężenia i odkształcenia odpowiadający czystemu skręcaniu (rys. 7.1).

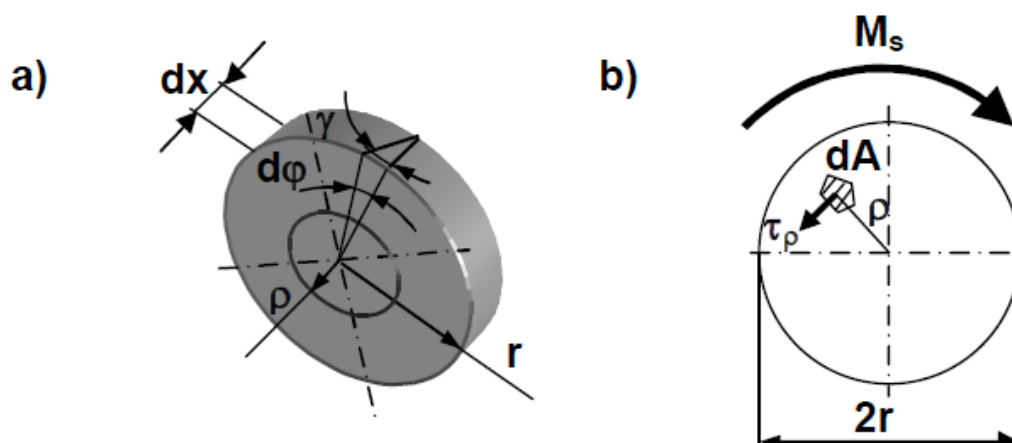


Rysunek 7.1. Pręt o przekroju kołowym poddany skręcaniu.

Tworząca **AB** na powierzchni bocznej po przyłożeniu obciążenia przyjmuje kształt linii śrubowej. Kąt pochylenia linii śrubowej **AB'** nazywamy kątem odkształcenia postaciowego i oznaczamy symbolem  $\gamma$  Rys. 7.2. Ponadto można zauważyć, że:

- oś pręta pozostanie nadal linią prostą po obciążeniu,
- okręgi kół nie ulegną zniekształceniu, a powierzchnie czołowe nadal pozostaną płaskie,
- powierzchnie czołowe obróca się względem siebie o pewien kąt  $\varphi$ , zwany kątem skręcenia.

Rozważmy wycinek o nieskończenie małej długości  $dx$  (Rys. 7.1, 7.2), powstały w wyniku przecięcia dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi pręta.



Rysunek 7.2. Wycinek pręta poddanego skręcaniu o nieskończenie małej grubości  $dx$ ; na rysunku zaznaczono kąt skręcenia  $d\varphi$  i kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$

Na powierzchni wycinka zachodzi następująca relacja między kątem skręcenia  $d\varphi$ , a kątem odkształcenia postaciowego  $\gamma$  (1):

$$rd\varphi = \gamma dx \quad (1)$$

a na powierzchni o promieniu  $\rho$  (2):

$$\rho d\varphi = \gamma_{\rho} dx \quad (2)$$

Przekształcając relację (2) otrzymujemy wyrażenie określające kąt skręcenia powierzchni o promieniu  $\rho$  (3):

$$\gamma_{\rho} = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (3)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a dla ścinania oraz wykorzystując zależność (3), naprężenia ścinające  $\tau_{\rho}$  (Rys. 7.2b) można wyrazić w funkcji kąta skręcenia jako (4):

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (4)$$

gdzie:  $G$  – moduł odkształcenia postaciowego (moduł Kirchhoffa) [MPa].

Z warunku równowagi dla wycinka pręta (Rys. 7.2b) wynika (5):

$$dM_s = \tau_\rho \rho dA = G \rho^2 \frac{d\varphi}{dx} \quad (5)$$

Wykonując całkowanie równania (5) po całej powierzchni przekroju poprzecznego  $A = \pi r^2$ , otrzymujemy (6):

$$M_s = \int \tau_\rho \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} I_0 \quad (6)$$

gdzie:  $I_0 = \pi \frac{r^4}{2} = \pi \frac{d^4}{32}$  - biegunowy moment bezwładności [ $\text{mm}^4$ ],  $d$  – średnica pręta [ $\text{mm}$ ].

Kąt skręcenia, na podstawie zależności (6), dla wycinka o długości  $dx$  wynosi (7):

$$d\varphi = \frac{M_s dx}{GI_0} \quad (7)$$

natomiast dla całego pręta o długości  $l$  daje zależność (8):

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^l \frac{M_s dx}{GI_0} = \frac{M_s l}{GI_0} \quad (8)$$

Analizując wzór (8) można zauważyć, że mierząc kąt skręcenia  $\varphi$  na pewnej odległości pomiarowej  $l_p$  oraz znając średnicę  $d$  badanego pręta (a przez to również  $I_0$ ) i przyłożony moment skręcający  $M_s$  można eksperymentalnie wyznaczyć wartość modułu sprężystości postaciowej  $G$  z relacji (9):

$$G = \frac{M_s l_p}{\varphi I_0} \quad (9)$$

Przy założeniu, że wyrażenie  $\frac{M_s}{GI_0} = \text{const.}$ , w zależności (8), tzn. że  $M_s$ ,  $G$ ,  $I_0$  nie zależą od zmiennej

$x$ . Na podstawie zależności (4) i (6) naprężenia ścinające  $\tau_\rho$  wynoszą (10):

$$\tau_\rho = G \gamma_\rho = G \rho \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{I_0} \rho \quad (10)$$

Ze wzoru (10) wynika, że największa wartość naprężenia wyraża się wzorem (11):

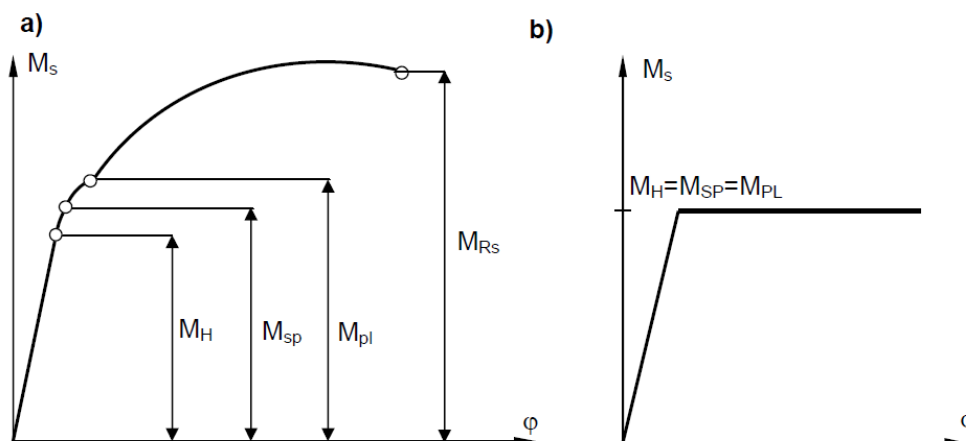
$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_0} \rho_{\max} = \frac{M_s}{I_0} r = \frac{M_s}{W_0} \quad (11)$$

gdzie:  $W_0 = \frac{I_0}{r} = \frac{2I_0}{d}$  - wskaźnik wytrzymałości przekroju pręta na skręcanie [ $\text{mm}^3$ ].

W obliczeniach prętów poddanych czystemu skręcaniu, korzystamy z warunku wytrzymałościowego (12):

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s \quad (12)$$

Wzory (1 – 12) są słuszne dla prętów poddanych czystemu skręcaniu o przekroju kołowym w zakresie sprężystym materiału. Aby uwzględnić fakt, że materiał z którego wykonano pręt może ulec trwałemu odkształceniu należy posłużyć się rzeczywistym lub uproszczonym modelem zachowania się materiału podczas próby skręcania. Przykładową krzywą skręcania materiału przedstawiono na Rys. 7.3a w układzie  $M_s(\varphi)$ .



Rysunek 7.3. Charakterystyki z próby skręcania: a) krzywa rzeczywista, b) teoretyczny model zachowania materiału sprężystego – idealnie plastycznego (model Prandtla)

Charakterystyczne punkty na wykresie 7.3 oznaczają:

$M_H$  – moment skręcający odpowiadający granicy proporcjonalności,

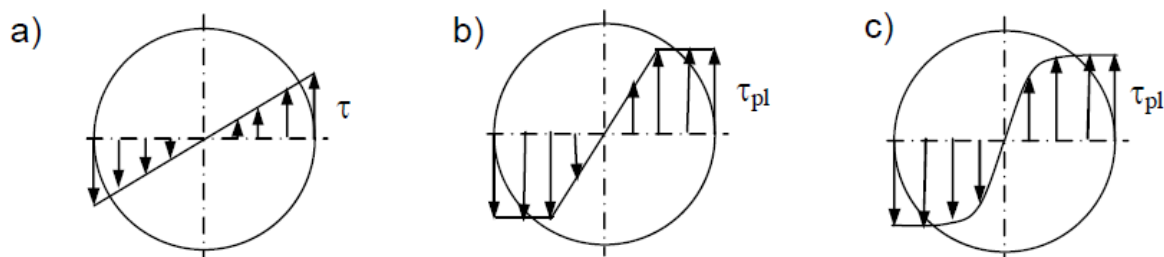
$M_{sp}$  – moment skręcający odpowiadający granicy sprężystości,

$M_{pl}$  – moment skręcający odpowiadający granicy plastyczności,

$M_{Rs}$  – maksymalny moment skręcający (niszczący) przeniesiony przez próbkę.

Zakładając sprężysty – idealnie plastyczny model materiałowy (Rys.7.3b), można wyróżnić trzy fazy określające proces całkowitego uplastycznienia przekroju, tzn. dla przypadku, gdy naprężenia ścinające osiągną wartość naprężeń plastycznych. W pierwszej fazie największe naprężenia ścinające  $\tau_{\max}$  są mniejsze od naprężeń plastycznych. Zgodnie ze wzorem (10) rozkład naprężeń na wykresie przybiera postać trójkątną – naprężenia zmieniają się liniowo wraz z odległością od środka przekroju poprzecznego (proporcjonalnie do rozważanego promienia  $\rho$ ). Gdy największe naprężenia przekroczą wartość naprężeń plastycznych, wtedy proces uplastycznienia postępuje do wnętrza przekroju pręta. Wykres naprężeń stycznych przechodzi stopniowo z trójkątnego (Rys. 7.4a) w postać podaną na Rys. 7.4b. Wówczas w skrajnych włóknach przekroju poprzecznego osiągnięty został stan plastyczny - naprężenia osiągnęły granicę plastyczności. Zgodnie z przyjętym modelem naprężenia plastyczne nie mogą zostać przekroczone – materiał jest idealnie plastyczny – stąd wzrost momentu skręcającego jest kompensowany przez ekspansję naprężeń plastycznych w głąb profilu kołowego. Zgodnie z teorią

nośności granicznej nośność przekroju kołowego zostanie wyczerpana kiedy naprężenia plastyczne będą panowały w każdym z punktów przekroju poprzecznego – prostokątny rozkład naprężeń tnących. Ze względu na fakt, że model Prandtla jest jedynie modelem przybliżonym, to w rzeczywistości rozkład naprężeń ścinających towarzyszących zniszczeniu pręta kołowego poddanego ścisłaniu będzie korespondował z przebiegiem zamieszczonym na Rys. 7.4c.



Rysunek 7.4 Rozkład naprężeń tnących w różnych fazach uplastycznienia

Początek uplastycznienia zaczyna się z chwilą gdy naprężenia maksymalne osiągną granicę plastyczności na ścinanie  $\tau_{pl}$ . Graniczna wartość momentu  $M_{pl}$  powodująca zjawisko uplastycznienia wynosi (13):

$$M_{pl} = \int_A \tau_{pl} \rho dA = \tau_{pl} \frac{1}{2} A \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} r = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_{pl} \quad (13)$$

Przyjmując współczynnik bezpieczeństwa jako (14):

$$n = \frac{M_{pl}}{M_s} \quad (14)$$

z zależności (13) i (14) otrzymujemy wzór na graniczny promień pręta skręcanego (15):

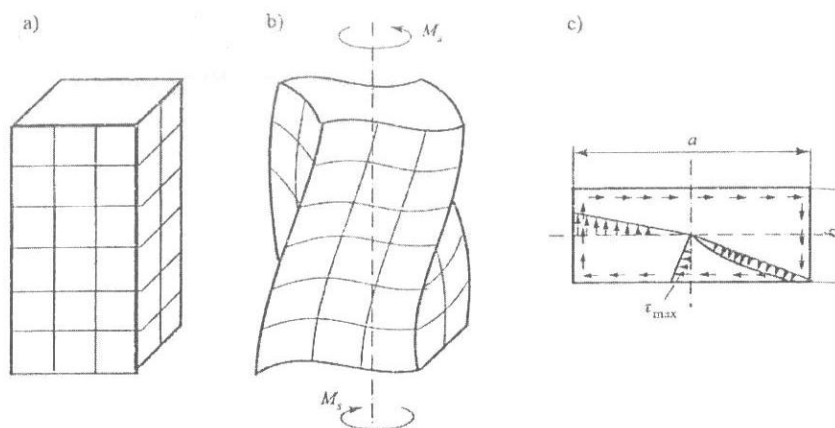
$$r = \sqrt{\frac{3M_s n}{2\tau_{pl}}} \quad (15)$$

Wyznaczona ze wzoru (15) wartość  $r$  jest o około 9,1 % mniejsza od wartości promienia wyznaczonej dla tego samego przypadku ze wzoru (11). Wzór (15) można stosować tylko wówczas, gdy:

- obciążenie pręta jest statyczne,
- stanem niebezpiecznym dla materiału pręta jest stan pełnego uplastycznienia próbki.

### 3. Pręt o przekroju prostokątnym.

W przypadku skręcania prętów o przekroju niekołowym przekroje prostopadłe do osi pręta, po obciążeniu momentem skręcającym  $M_s$ , nie pozostają płaskie, lecz ulegają deplanacji (spaczeniu) to znaczy przekrój płaski przed odkształceniem nie zachowuje płaskości po obciążeniu (rys. 7.5). Podczas deplanacji punkty odkształconego przekroju pozostają nie na płaszczyźnie, ale na pewnej powierzchni krzywoliniowej, określonej przez odpowiednią funkcję spaczenia. Deplanacja powoduje, że rozkład naprężeń stycznych w przekroju takiego pręta jest znacznie bardziej skomplikowany niż w przypadku pręta o przekroju kołowym.



Rysunek 7.5. Deformacja pręta prostokątnego przed (a) i po (b) przyłożeniu momentu skręcającego oraz rozkład naprężeń tnących w różnych miejscach przekroju poprzecznego pręta (c)

Przedstawione rozważania dotyczą swobodnego skręcania pręta o stałym przekroju prostokątnym parami sił, przyłożonymi na jego końcach. Takiemu skręcaniu nie towarzyszy powstanie w przekrojach pręta naprężeń normalnych, co jest możliwe w przypadku całkowicie swobodnej deplanacji. Wynika stąd, że przyjmowana bardzo często w obliczeniach wytrzymałościowych (zginanie, skręcanie) hipoteza płaskich przekrojów w tym przypadku nie ma zastosowania. Obliczeń wytrzymałościowych na skręcanie tego rodzaju prętów dokonuje się w oparciu o teorię sprężystości według metody rozwiązywania prętów skręcanych o przekroju niekołowym opracowanej przez de Saint-Venanta w 1864 roku. Wykazuje się, że przy skręcaniu swobodnym pręta o dowolnym przekroju w punktach na konturze naprężenia styczne mogą być skierowane wyłącznie styczne do konturu, zgodnie z analogią hydrodynamiczną. Na podstawie analogii można przyjąć, że naprężenia styczne tworzą ciągły strumień skierowany wzdłuż konturu zgodnie z rysunkiem 7.5c. Największą wartość naprężenia styczne  $\tau_{max}$  osiągają w środku dłuższych boków prostokąta, a w narożach są równe zero. Ponadto nie obowiązuje zasada proporcjonalności wartości naprężeń stycznych do ich odległości od środka przekroju poprzecznego ani też zasada prostopadłości do promienia, jak ma to miejsce w przypadku skręcania prętów o przekroju kołowym. Wartość naprężeń  $\tau_{max}$  powstających w pręcie o przekroju prostokątnym skręcanym momentem  $M_s$  oraz jednostkowy kąt skręcenia  $\theta$  (na jednostkę długości pręta) oblicza się na podstawie wzorów podanych przez de Saint-Venanta, odpowiednio (16) i (17):

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{\alpha ab^2} \quad (16)$$



$$\theta = \frac{M_s}{\beta a b^3 G} \quad (17)$$

gdzie  $a$ ,  $b$  – długości boków przekroju poprzecznego pręta (rys. 7.5),  $\alpha$ ,  $\beta$  – współczynniki, których wartości zależą od stosunku  $a/b$  (tab. 7.1),  $G$  – moduł sprężystości postaciowej.

Tablica 7.1

a/b	1	1.5	2	2.5	3	4	5	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.293	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.293	0.299	0.307	0.313	0.333

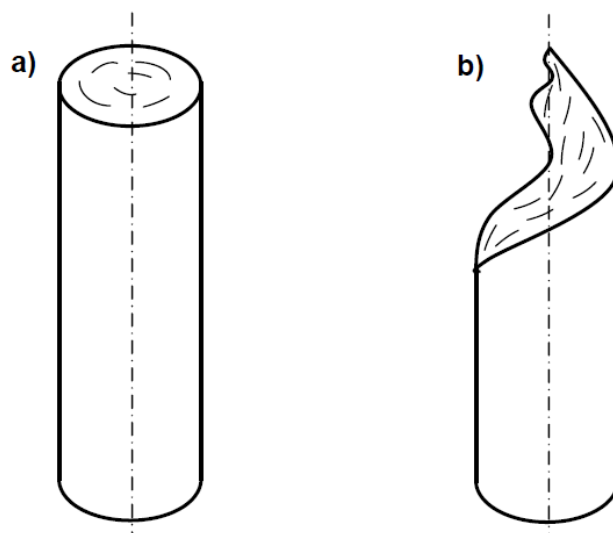
Kąt skręcenia pręta  $\varphi$  na długości pomiarowej  $l_p$  (przy  $M_s = \text{const}$ ) jest równy (18):

$$\varphi = \frac{M_s l_p}{\beta a b^3 G} \quad (18)$$

Nadmienia się, że skręcanie swobodne jest obciążeniem trudnym do zrealizowania w praktyce. Obciążenie takie wymaga pozostawienia możliwości swobodnej deformacji każdemu z przekrojów poprzecznych pręta. Jednostronne utwierdzenie pręta, które jest realizowane na stanowisku badawczym, nie spełnia tego założenia, ponieważ utwierdzone przekroje poprzeczne nie mają możliwości swobodnej deplanacji. Nałożenie jakichkolwiek ograniczeń w swobodzie deplanacji dowolnego przekroju poprzecznego pręta niekołowego sprawia, że realizowany scenariusz obciążenia to skręcanie nieswobodne. W przypadku prętów o znacznej długości (w stosunku do największego wymiaru przekroju poprzecznego) zjawisko to ma jednak nieznaczny wpływ na otrzymane wyniki.

#### 4. Próbkki do próby skręcania.

W próbie skręcania używa się głównie próbek o przekroju kołowym. Próbkki o innych przekrojach stosowane są w przypadkach prób specjalnych. Dla pełnych próbek walcowych długość pomiarową  $l_p$  (patrz Rys. 7.8) przyjmuje się w zakresie  $(5 \div 20)d_0$ ; najczęściej  $l_p = 10d_0$ , gdzie  $d_0$  jest średnicą pomiarową próbki (tzn.  $d_0 = 2r$  – Rys.7.1). Jako obróbkę końcową dla próbek na skręcanie przyjmuje się toczenie wykańczające.



Rysunek 7.6 Rodzaje złomów próbek poddanych zniszczeniu

W przypadku skręcania próbek stalowych aż do ich zniszczenia – zależnie od jakości i rodzaju badanego materiału – rozróżniamy trzy charakterystyczne rodzaje złomów:

1. *Złom poślizgowy* (Rys. 7.6a). Występuje on w płaszczyźnie prostopadłej do osi próbki (w płaszczyźnie tej wartości naprężeń stycznych są największe). Zniszczenie próbki następuje przez ścięcie. Widoczne są ślady plastycznych poślizgów. Tego rodzaju złomy występują w próbkach stalowych.

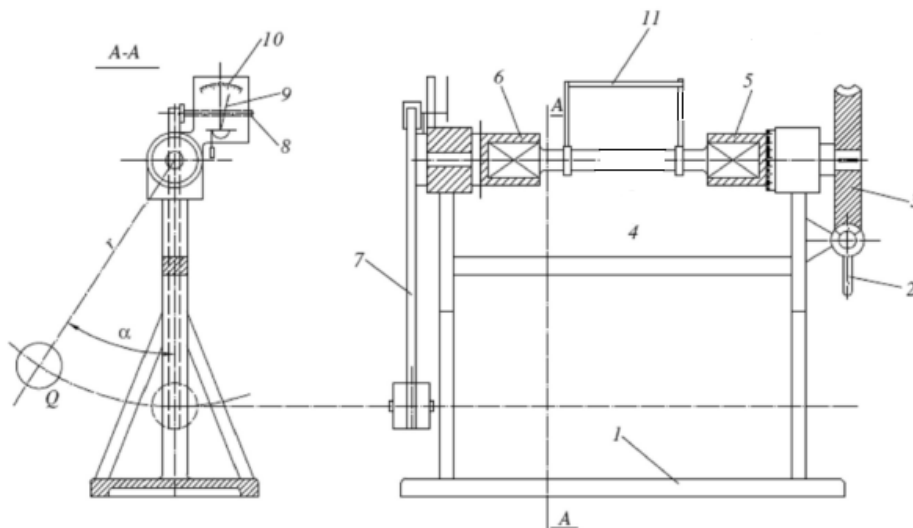
2. *Złom kruchy* (Rys. 7.6b). Występuje w materiałach takich, jak np. żeliwo. Zniszczenie powstaje tu na skutek rozerwania w wyniku działania głównych naprężeń – występują w płaszczyznach nachylonych pod kątem  $45^\circ$  do osi próbki. Złom kruchy przebiega wzdłuż linii śrubowej nachylonej pod kątem  $45^\circ$  do osi próbki.

3. *Złom rozwarstwiony drzazgowy* (o pęknięciach równoległych do osi próbki). Powodem tego rodzaju złomów jest niejednorodna budowa materiału, powstała wskutek zawalcowania czy obecności obcych wtrąceń.

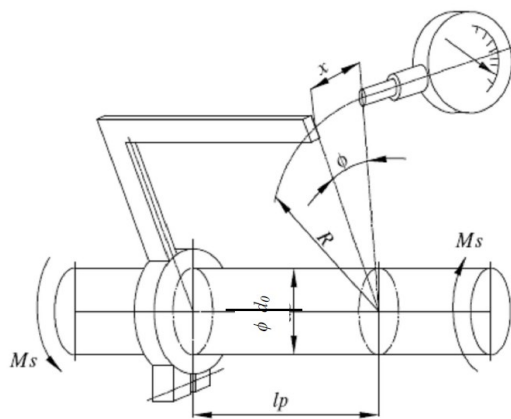
## 5. Budowa skręcarki.

Próba skręcania przeprowadzana jest na maszynach zwanych skręcarkami, które pozwalają na zamocowanie i obciążanie próbki dwoma równoważącymi się momentami działającymi w płaszczyznach prostopadłych do osi próbki. Na skręcance dokonywany jest jednocześnie pomiar

momentu skręcającego  $M_s$  oraz kąta skręcenia  $\rho$  na długości pomiarowej  $l_p$ . Na rysunku 7.7 przedstawiono jeden z typów skrecarki, przy czym zastosowano następujące oznaczenia: 1 – korpus skrecarki, 2 – korba do obciążania próbki, 3 – przekładnia ślimakowa, 4 – próbka, 5 – uchwyt napędowy, 6 – uchwyt pomiarowy, 7 – dźwignia z obciążnikami, 8 – napęd wskazówki, 9 – wskazówka, 10 – skala wartości momentu skręcającego, 11 – urządzenie do wyznaczania kąta skręcenia próbki (patrz Rys. 7.8).



Rysunek 7.7 Schemat poglądowy skrecarki



Rysunek 7.8 Idea pomiaru kąta skręcenia

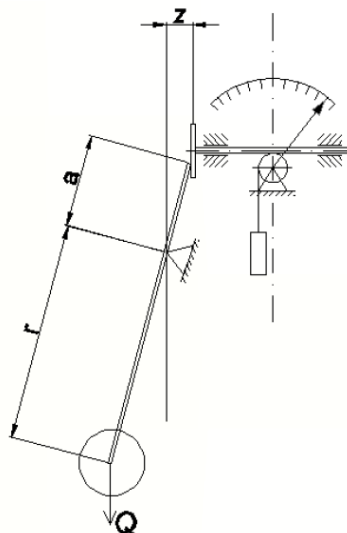
Na rysunku 7.9 przedstawiono schemat układu dźwigniowego skrecarki. Jego górne ramię przesuwając zębatkę wywołuje obrót kółka zębatego, a tym samym związanej z nim wskazówki. Jak widać z rysunku 7.7 i 7.9,

$$M_s = Qr \sin(\alpha) \quad (19)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{z}{a} \quad (20)$$

Stąd otrzymujemy:

$$M_s = Qr \frac{z}{a} \quad (21)$$



Rysunek 7.9 Schemat poglądowy mechanizmu skrętkarki generującego moment skręcający

Oznacza to, że wartość momentu skręcającego zmienia się liniowo. Sposób wyznaczania kąta skręcenia  $\varphi$  próbki za pomocą urządzenia *II* przedstawiono na Rys. 7.9. Kąt obrotu względem siebie dwóch przekrojów prostopadłych do osi próbki i oddalonych od siebie o  $lp$  można wyznaczyć przez pomiar czujnikiem zegarowym przemieszczenia  $x$  wywołanego skręceniem odcinka pomiarowego o długości  $lp$ . Kąt ten wynosi (22):

$$\varphi \approx \frac{x}{R} \quad (22)$$

gdzie:  $R$  – odległość osi skręcanej próbki od osi wrzeciona czujnika,  $x$  – przemieszczenie końca wrzeciona czujnika wywołanego kątem skręcenia  $\varphi$ .

### 6.1. Przeprowadzenie próby skręcania pręta o przekroju kołowym.

Jeśli w sprawozdaniu laboratoryjnym nie podano wymiarów charakterystycznych próbki badawczej oraz długości pomiarowej to przed przystąpieniem do właściwej próby należy zmierzyć: średnicę próbki  $d_0$  w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach z dokładnością do 0.1 mm, długość odcinka

pomiarowego  $lp$  z dokładnością do 0.1 mm, promień  $R$ , na którym umieszczony jest czujnik, z dokładnością do 1 mm. Następnie należy wykonać następujące czynności:

1. Ustawić czujnik pomiarowy tak, aby jego wrzeciono miało możliwość wychyleń o około 2 mm.
2. Łagodnie kręcąc korbą, zwłaszcza przy odciażaniu, skręcać próbkę kolejno momentami: 0, 60, 120, 60 i 0 Nm. Dla tych momentów zanotować w tabeli 7.2 wskazanie czujnika zegarowego.

Tabela 7.2. Podsumowanie badań doświadczalnych dla pręta o przekroju kołowym

L.p.	Moment skręcający $M_s$ [Nm]	Wskazanie czujnika zegarowego $A_i$ [mm]	Różnica wskazań czujnika między kolejnymi zmianami momentu skręcającego $ A_i - A_{i-1} $ [mm]
1	0		X
2	60		
3	120		
4	60		
5	0		
$\sum  A_i - A_{i-1}  =$			

3. Obliczyć średnią różnicę wskazań czujnika zegarowego dla zmian momentu skręcającego o 60 Nm według zależności (23):

$$\Delta x_{sr} = \frac{\sum (A_i - A_{i-1})}{4} \text{ [mm]} \quad (23)$$

gdzie:  $\sum(A_i - A_{i-1})$  - jest sumą różnic wskazań czujnika zegarowego wywołanych zmianami momentu skręcającego o 60 Nm (Tabela 7.2).

4. Wyznaczyć średnią zmianę kąta skręcenia odpowiadającą zmianie momentu skręcającego o 60 [Nm] stosując (24):

$$\Delta \varphi_{sr} = \frac{\Delta x_{sr}}{R} \text{ [rad]} \quad (24)$$

5. Sprawdzić, czy maksymalne naprężenia skręcające, jakie wystąpiły w czasie próby, nie przekroczyły naprężeń dopuszczalnych, wynoszących dla badanego materiału  $k_s=80$  MPa. Wykorzystaj zależność (12) i maksymalny moment skręcający zarejestrowany w trakcie próby.
6. Wyznaczyć moduł sprężystości postaciowej  $G$  [MPa] z zależności (25):

$$G = \frac{\Delta M_s I_p}{\Delta \varphi_{sr} I_0} \quad (25)$$

gdzie  $\Delta M_s$  jest przyrostem momentu skręcającego między kolejnymi pomiarami (60Nm) a  $\Delta \varphi_{sr}$  – średnią zmianą kąta skręcenia odpowiadającą przyrostowi tego momentu.

**UWAGA:** W celu eliminacji błędów rachunkowych przeprowadź rachunek jednostek.

7. Obliczyć względny błąd pomiaru modułu Kirchhoffa metodą czujnika zegarowego stosując (26):

$$\Delta G = \frac{|G - G_{teor}|}{G_{teor}} \cdot 100 [\%] \quad (26)$$

gdzie  $G_{teor}$  należy wyznaczyć z zależności (27):

$$G_{teor} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (27)$$

przyjmując moduł Younga stali  $E$  na poziomie 210 GPa oraz liczbę Poissona  $\nu$  jako 0.3.

## 6.2. Przeprowadzenie próby skręcania pręta o przekroju prostokątnym.

Jeśli w sprawozdaniu laboratoryjnym nie podano wymiarów charakterystycznych próbki badawczej oraz długości pomiarowej to przed przystąpieniem do właściwej próby należy zmierzyć długości boków ( $a$  i  $b$ ) przekroju poprzecznego pręta z dokładnością do 0.1 mm, długość pomiarową  $l_p$ , z dokładnością do 1 mm, promień  $R$ , na którym umieszczony jest czujnik, z dokładnością do 1mm. Następnie należy:

1. Ustawić czujnik pomiarowy tak, aby jego wrzeciono miało możliwość wychyleń o około 2 mm.
2. Łagodnie kręcąc korbą (zwłaszcza przy odciążaniu), skręcać próbkę kolejno momentami: 0, 30, 60, 90, 60, 30 i 0 Nm. Dla tych momentów zanotować w tabeli 7.3 wskazanie czujnika zegarowego.

Tabela 7.3. Podsumowanie badań doświadczalnych dla pręta o przekroju prostokątnym.

L.p.	Moment skręcający $M_s$ [Nm]	Wskazanie czujnika zegarowego $A_i$ [mm]	Różnica wskazań czujnika między kolejnymi zmianami momentu skręcającego $ A_i - A_{i-1} $ [mm]
1	0		X
2	30		
3	60		
4	90		
5	60		
6	30		
7	0		
$\sum  A_i - A_{i-1}  =$			

3. Obliczyć średnią różnicę wskazań czujnika zegarowego dla zmian momentu skręcającego o 30 Nm stosując (28):

$$\Delta x_{sr} = \frac{\sum (A_i - A_{i-1})}{6} \text{ [mm]} \quad (28)$$

gdzie:  $\sum(A_i - A_{i-1})$  - jest sumą różnic wskazań czujnika zegarowego wywołanych zmianami momentu skręcającego o 30 Nm (Tabela 7.3).

4. Wyznaczyć średnią zmianę kąta skręcenia odpowiadającą zmianie momentu skręcającego o 30 [Nm] wykorzystując (29):

$$\Delta \varphi_{sr} = \frac{\Delta x_{sr}}{R} \text{ [rad]} \quad (29)$$

5. Sprawdzić, czy maksymalne naprężenia skręcające, jakie wystąpiły w czasie próby, nie przekroczyły naprężeń dopuszczalnych, wynoszących dla badanego materiału  $k_s=80$  [MPa]. Wykorzystaj zależność (16) i maksymalny moment skręcający zarejestrowany w trakcie próby.
6. Wyznaczyć moduł sprężystości postaciowej  $G$  [MPa] z zależności (30):

$$G = \frac{\Delta M_s I_p}{\Delta \varphi_{sr} \beta a b^3} \quad (30)$$

gdzie  $\Delta M_s$  jest przyrostem momentu skręcającego między kolejnymi pomiarami (30 Nm) a  $\Delta \varphi_{sr}$  – średnią zmianą kąta skręcenia odpowiadającą przyrostowi tego momentu.

UWAGA: W celu eliminacji błędów rachunkowych przeprowadź rachunek jednostek.

7. Obliczyć względny błąd pomiaru modułu Kirchhoffa metodą czujnika zegarowego. Skorzystaj z zależności (26) i (27).

## 7. Wykonanie sprawozdania.

Wykonać sprawozdanie zgodnie z udostępnionym szablonem. W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. cel ćwiczenia,
2. opis stanowiska do badań,
3. wyniki pomiarów,
4. obliczenia,
5. uwagi i wnioski.

Sprawozdania do ćwiczeń laboratoryjnych są dostępne na platformie WIKAMP w kursie realizowanego przedmiotu.

## 8. Przykładowe pytania kontrolne.

1. Wyprowadzić wzór na kąt skręcenia dla pręta o przekroju kołowym.
2. Naszkicować i opisać rozkład naprężeń skręcających podczas etapów uplastycznienia przekroju kołowego pręta.
3. Prawo Hooke'a dla ścinania.
4. Wyprowadzić wzór określający maksymalne naprężenia skręcające dla pręta okrągłego.
5. Przedstawić charakterystyczne rodzaje złomów dla próbek o przekroju kołowym.
6. Zapisać wzór na maksymalne naprężenia tnące w pręcie o przekroju prostokątnym oraz wyjaśnić wszystkie wielkości w nim występujące.
7. Wyjaśnić zjawisko deplanacji.
8. Wyjaśnić różnicę między skręcaniem swobodnym i nieswobodnym.
9. Wyjaśnić analogię hydrodynamiczną dla prętów niekołowych poddanych skręcaniu.
10. Wyjaśnij teoretyczny zachowania materiału sprężysto-idealnie plastycznego (model Prandtla).

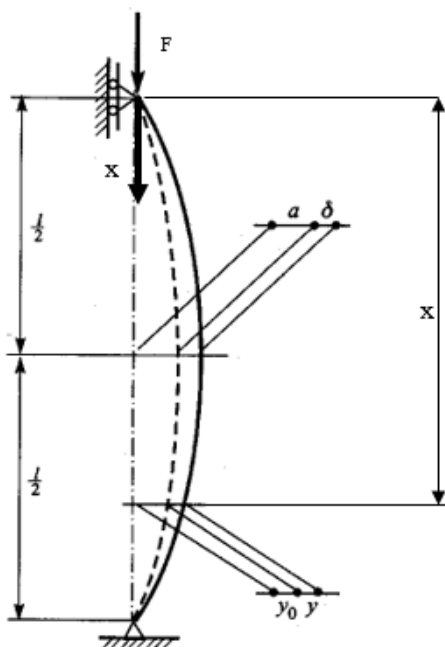


## Ćwiczenie 8

### BADANIE WYBOCZENIA PRĘTA ŚCISKANEGO

#### 8.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie zjawiska wyboczenia ściskanego pręta oraz eksperymentalne wyznaczenie siły krytycznej.



Rysunek 1. Zjawisko wyboczenia pręta na przykładzie pręta poddanego ścisnaniu osiowemu

#### 8.2. Podstawowe zależności dotyczące wyboczenia pręta ściskanego

Siła krytyczna jako siła powodująca zjawisko wyboczenia pręta, określona wzorem Eulera dla pręta ściskanego, przedstawia się zależnością (1):

$$F_{krE} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_w^2} \quad (1)$$

Smukłość geometryczna (2) i smukłość graniczna (3) dla prętów ściskanych oraz naprężenia krytyczne (4) (ogólna zależność) i (5) (prosta Tetmajera-Jasińskiego) przedstawione zostały za pomocą następujących zależności:

$$S = \frac{l_w}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{l_w}{i_{min}} \quad (2)$$

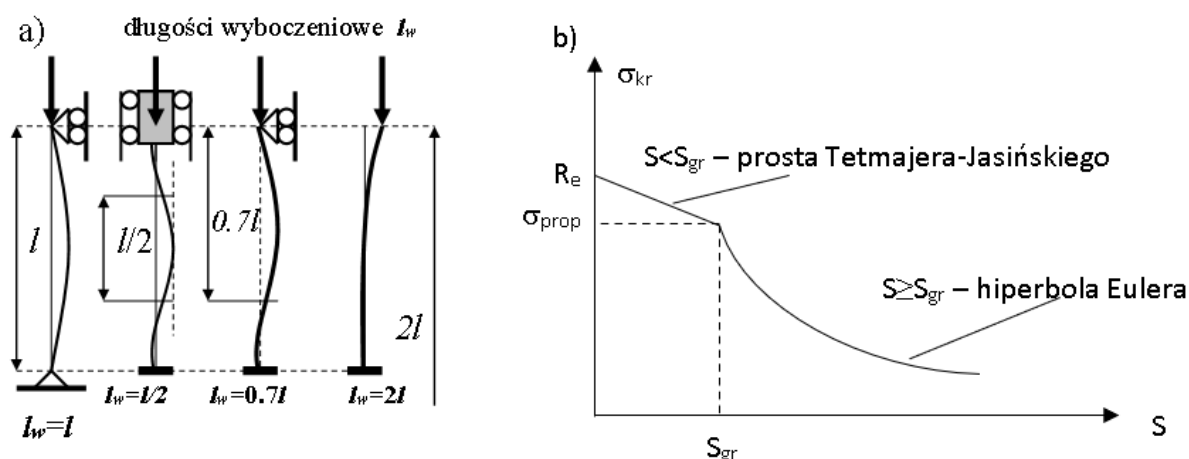
$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop}}} \quad (3)$$

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} \quad (4)$$

$$\sigma_{krT-J} = a - b \cdot S = R_e - \frac{R_e - \sigma_{prop}}{S_{gr}} S \quad (5)$$

Oznaczenia znajdują się na końcu instrukcji.

Naprężenia krytyczne w funkcji smukłości można przedstawić w formie wykresu (Rys. 2b), natomiast długość wyboczeniowa zależy jedynie od sposobu podparcia i długości pręta i jej wartości zostały przedstawione na rysunku 2a.



Rysunek 2. a) Długości wyboczeniowe prętów w zależności od warunków podparcia b) zależność naprężenia krytycznego od smukłości

### 8.3. Eksperymentalne metody wyznaczania siły krytycznej

Rozróżniamy dwie podstawowe metody wyznaczania siły krytycznej dla prętów poddanych ścisnaniu osiowemu siłą skupioną:

- metoda Southwella (dla podparcia przegubowego pręta),
- metoda graficzna (dla dowolnego podparcia pręta).

Metody zostaną omówione w dalszej części niniejszej instrukcji.

#### 8.3.1. Metoda Southwella

Ze względu na ugięcia wstępne pręta oraz nieosiowość zadanego obciążenia (pręta w praktyce nie można obciążyć siłą dokładnie przyłożoną w osi), bezpośrednie wyznaczenie siły krytycznej pręta jest możliwe w oparciu o metodę Southwella. Na rysunku 1. pokazano schemat pręta, który uległ wyboczeniu. Zakładamy ugięcie wstępne (tzw. imperfekcję wstępną kształtu) w postaci:

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

gdzie  $a$  jest ugięciem w połowie długości pręta (amplitudą). Funkcja (6) spełnia warunki brzegowe przegubowego podparcia pręta. Jeżeli pręt obciążymy siłą osiową  $F$ , to całkowite ugięcie wyniesie:

$$y_1 = y_0 + y. \quad (7)$$

Moment gnący w przekroju o współrzędnej  $x$  wynosi:

$$M_g = Fy_1 = P(y_0 + y). \quad (8)$$

Uwzględniając zależność (8), równanie linii ugięcia pręta możemy zapisać w postaci:

$$EI_{min}y''(x) = -M_g = -F(y + y_0) \quad (9)$$

Dzieląc obie strony równania (9) przez  $EI_{min}$  i uwzględniając w nim zależność (6) otrzymujemy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -k^2a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (10)$$

gdzie:

$$k^2 = \frac{F}{EI_{min}}. \quad (11)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego (10) rozwiązujemy metodą przewidywania i przewidujemy w postaci całki ogólnej i szczególnej:

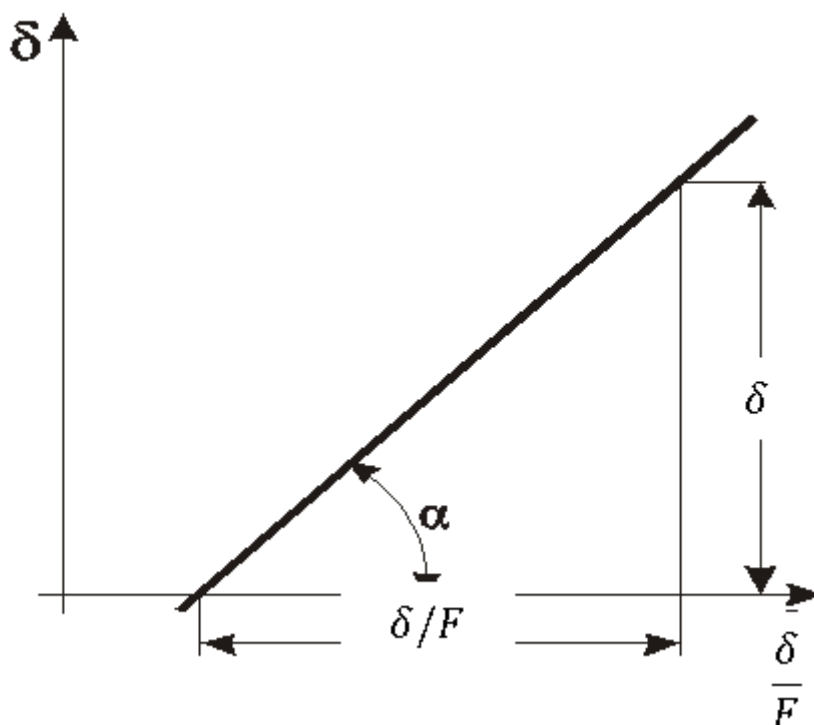
$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{a}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (12)$$

Z warunków brzegowych swobodnego podparcia końców pręta wyznaczamy stałe  $C_1$  i  $C_2$ . Z warunku  $y = 0$  dla  $x = 0$  wynika, że  $C_1 = 0$  oraz z warunku  $y = 0$  dla  $x = l$  wynika również  $C_2 = 0$  (dla  $F < F_{kr}$ ). Zatem linia ugięcia pręta dla  $F < F_{kr}$  zdefiniowana jest następująco:

$$y = \frac{a}{\frac{F_{kr}}{F} - 1} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (13)$$

Ugięcie w połowie długości pręta wynosi:

$$y_{x=\frac{l}{2}} = \delta = \frac{a}{\frac{F_{kr}}{F} - 1}. \quad (14)$$



Rysunek 3. Wykres Southwella.

Zależność (14) jest równaniem linii prostej w układzie współrzędnych  $(\frac{\delta}{F}, \delta)$  i można ją zapisać w postaci (15) (rys. 3):

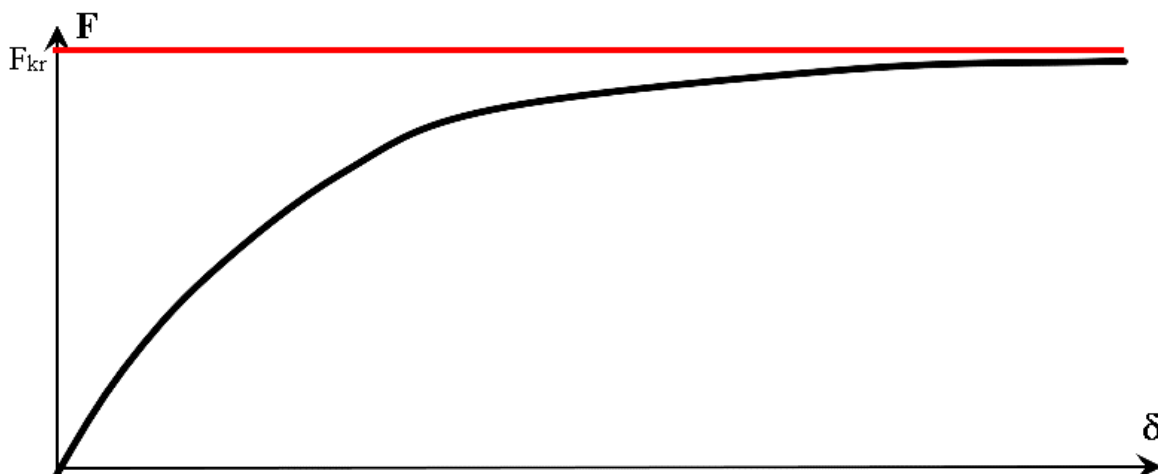
$$\delta = F_{kr} \frac{\delta}{F} - a, \quad (15)$$

gdzie:  $\text{tg } \alpha = F_{kr}$ .

Wykres pokazany na rysunku 3 sporządzamy na podstawie pomiarów siły ściskającej i ugięcia w połowie długości pręta, po czym zbiór punktów przybliżany jest półprostą, a następnie odczytujemy na jego podstawie wartość  $\text{tg } \alpha$  równą poszukiwanej wartości siły krytycznej.

### 8.3.2. Graficzna metoda wyznaczenia siły krytycznej

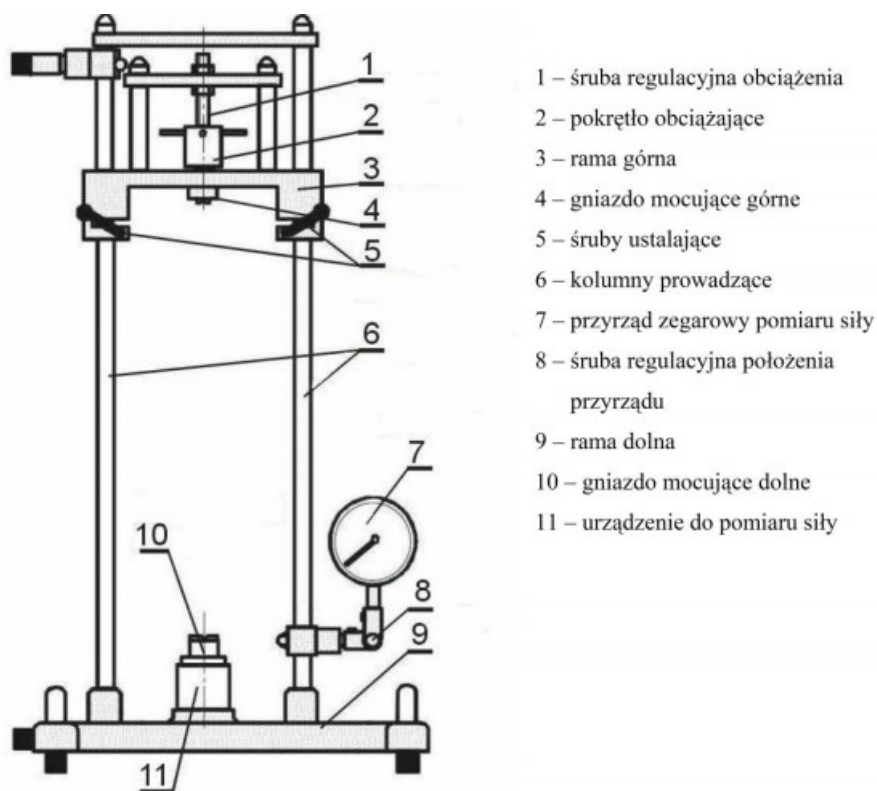
Wyznaczenie siły krytycznej prętów jest również możliwe poprzez zastosowanie metody graficznej. Polega ona na eksperymentalnym wyznaczeniu zależności między siłą a maksymalnym ugięciem wybranego pręta poddanego osiowemu ściskaniu. Zwiększając stopniowo siłę, mierzone jest ugięcie w połowie długości pręta za pomocą czujnika przemieszczeń. Eksperyment uznaje się za zakończony, gdy przy niewielkiej zmianie siły, ugięcie znacząco rośnie. Następnie, na podstawie otrzymanego wykresu (obciążenie w funkcji ugięcia), wyznaczamy obciążenie krytyczne, które odpowiada maksymalnej wartości obciążenia, przy której wartość siły nie ulega zmianie, przy znacząco rosnącym ugięciu pręta. Sposób wyznaczenia siły krytycznej na podstawie wykresu pokazany jest na rysunku 4.



Rysunek 4. Sposób wyznaczenia siły krytycznej metodą graficzną

#### 8.4. Wykonanie ćwiczenia

Na rysunku 5 przedstawiono stanowisko do wyznaczenia siły krytycznej inicjującej zjawisko wyboczenia pręta poddanego ściskaniu osiową siłą wraz z opisem elementów wchodzących w skład stanowiska.



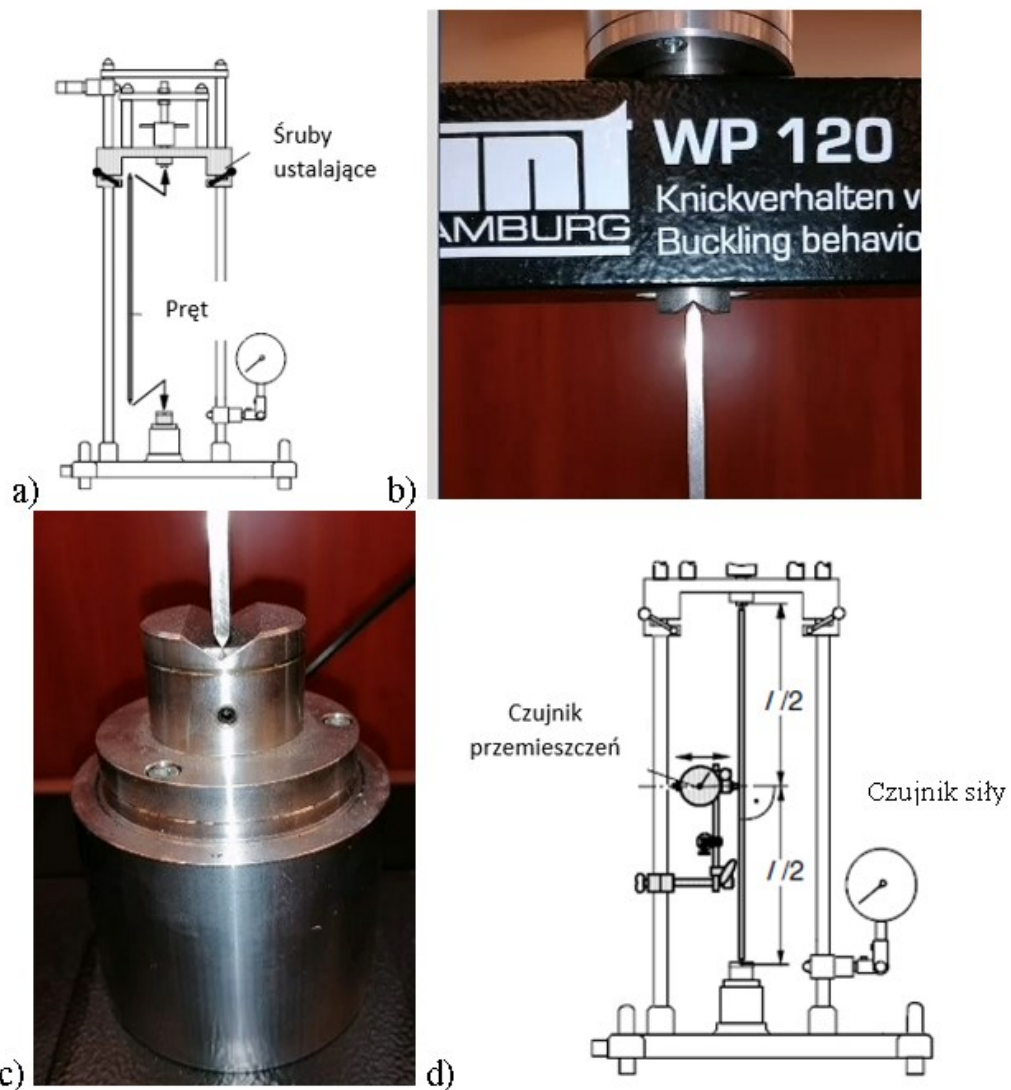
Rysunek 5. Stanowisko do badania wyboczenia pręta

Poniżej w tabeli zestawiono wartości modułu Younga w zależności od rodzaju materiału rodzajów prętów:

Materiał	Moduł Younga [GPa]
Stal	200
Mosiądz	104
Miedź	125
Aluminium	70

8.4.1. Przygotowanie stanowiska pomiarowego (przejdź do podrozdziału 4.2, jeśli stanowisko jest gotowe)

- 1) Umieść pręt zaproponowany przez prowadzącego na stanowisku pomiarowym (Rys. 5, 6). Podparcie przegubowe zrealizowane jest poprzez specjalne pryzmy (rys. 6b – pryzma górna ruchoma, rys. 6c – pryzma dolna nieruchoma);
- 2) Ustaw czujnik przemieszczeń w środku długości pręta. Wrzeciono miernika musi być ustawione równoległe do kierunku wyboczenia. Ustaw stan czujnika na 0 mm (rys. 6d);
- 3) Należy skasować luz jaki występować może po zamocowaniu pręta przy pomocy pokrętła obciążającego (rysunek 5).



Rysunek 6. Stanowisko do przeprowadzenia wyboczenia pręta: a) widok na stanowisko badawcze – sposób mocowania pręta, b) realizacja górnego podparcia pręta (ruchomego), c) realizacja dolnego podparcia pręta (nieruchomego), d) mocowanie czujnika przemieszczeń w połowie długości pręta.

#### 8.4.2. Przebieg ćwiczenia

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników składa się z następujących czynności:

- 1) Obliczenie smukłości pręta i sprawdzenie, czy obliczona smukłość jest większa lub równa (mniejsza) od granicznej (równania (2) i (3)).
- 2) Obliczenie teoretycznej wartości siły krytycznej.
- 3) Przeprowadzenie testu wyboczenia dla wybranego pręta:

- a. Przyłóż ostrożnie obciążenie za pomocą pokrętła ze śrubą (Rys. 5). Zanotować w tabeli pomiarowej zadane ugięcie 0 mm i odpowiadającą mu wartość. Operację powtórzyć dla kolejnych wartości siły. Zanotować wartość czujnika przemieszczeń.
  - b. Test można zakończyć, gdy przy niewielkiej zmianie siły, ugięcie znacząco rośnie.
  - c. Zapisz wartości pomiarów ugięcia i obciążenia w sprawozdaniu oraz uzupełnij tabelę pomiarową.
  - d. Odciaż pręt pokrętłem obciążającym.
- 4) Obliczenie (na podstawie wykonanych pomiarów) wartości  $\frac{\delta}{F}$ .
  - 5) Sporządzenie wykresu  $\delta$  w funkcji  $\frac{\delta}{F}$  oraz wykresu  $F$  w funkcji  $\delta$ .
  - 6) Zastosowanie metody Southwella oraz metody graficznej do wyznaczenia eksperymentalnej wartości siły krytycznej.
  - 7) Obliczenie względnego błędu pomiarowego dla dwóch metod doświadczalnych, względem wartości teoretycznej siły krytycznej.
  - 8) Podsumowanie wyników badań, obliczeń i obserwacji.

### Spis oznaczeń:

$A$	- pole przekroju poprzecznego pręta
$I_{min}$	- minimalny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta
$l_w$	- długość wyboczeniowa
$S$	- smukłość pręta
$S_{gr}$	- smukłość graniczna
$\sigma_{prop}, R_H$	- granica proporcjonalności
$R_e$	- granica plastyczności
$i_{min}$	- minimalny promień bezwładności

### 8.5. Literatura

- [1] Ćwiczenia laboratoryjne z wytrzymałości materiałów. Praca zbiorowa pod red. M. Banasiaka, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2000, str. 184-194.
- [2] Laboratorium Wytrzymałości Materiałów. Praca zbiorowa pod redakcją R. Grądzkiego, Wyd. Wydziału O. i Z. PŁ.
- [3] Niezgodziński M.E. Niezgodziński T.: Wytrzymałość Materiałów, wyd. XIII, Wydawnictwo PWN, Warszawa



## Ćwiczenie 9

### BADANIE ODKSZTAŁCEŃ RAMY

#### 9.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest weryfikacja doświadczalna odkształceń ramy statycznie niewyznaczalnej, wyznaczonych analitycznie metodami energetycznymi.

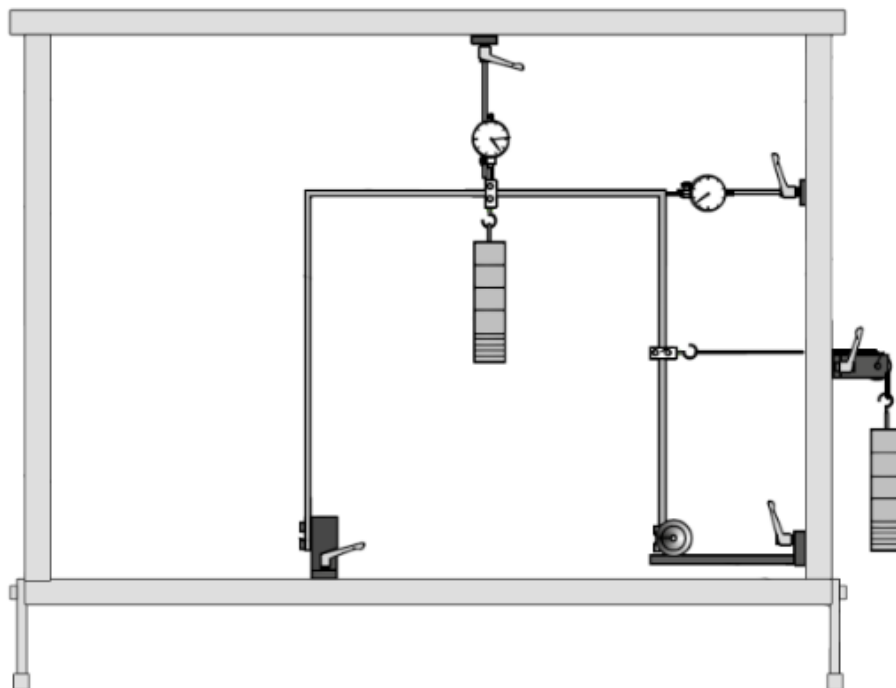
#### 9.2. Wprowadzenie

Widok stanowiska badawczego z zamocowaną ramą przedstawiono na rys.9.1.

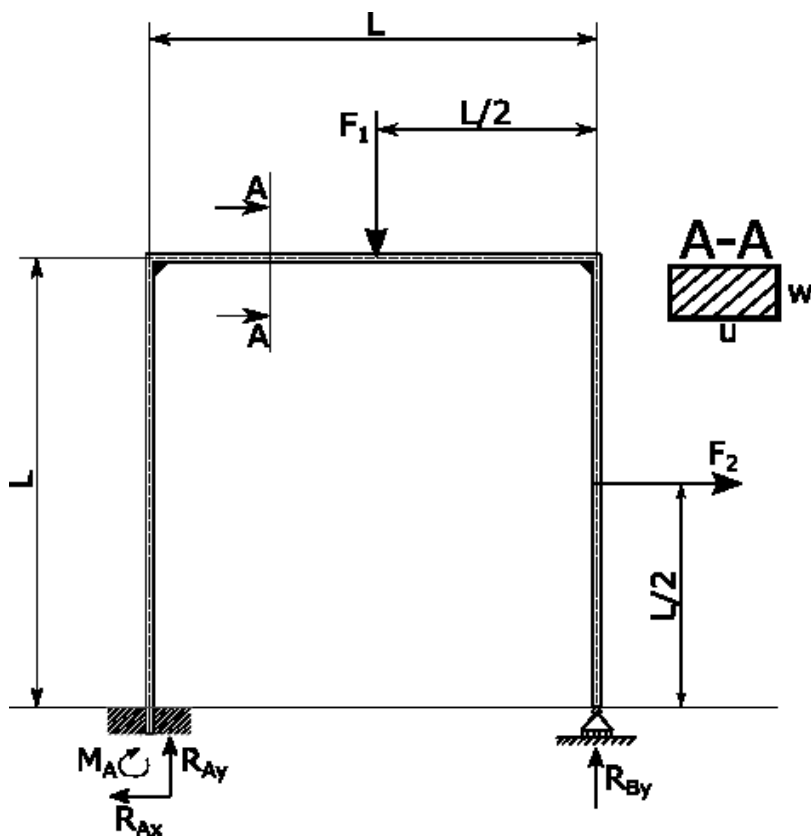


Rysunek 9.1. Widok stanowiska doświadczalnego.

Budowa stanowiska umożliwia obciążenie ramy siłą pionową w połowie rozpiętości ramy oraz siłą poziomą w połowie prawego słupa. Zegarowe mierniki pozwalają na pomiar ugięć (rys.9.2).



Rysunek 9.2. Schemat stanowiska doświadczalnego z zamocowaną ramą.



Rysunek 9.3. Schemat statyczny ramy.

### 9.3. Obliczenia analityczne

Przed przystąpieniem do badań doświadczalnych należy obliczyć wartości ugięć stosując metodę energetyczną. Układ obciążenia i miejsce odkształcenia zostanie podane przez prowadzącego ćwiczenie.

Otrzymany wynik obliczeń można sprawdzić porównując z rozwiązaniem dla obciążenia obiema siłami  $F_1$  oraz  $F_2$  (rys. 9.3)

- ugięcie pionowe w połowie rozpiętości ramy

$$f_1 = \frac{L^3}{EI} \left( \frac{55F_1 + 156F_2}{3072} \right)$$

- przemieszczenie poziome górnego prawego naroża ramy

$$f_2 = \frac{L^3}{EI} \left( \frac{9F_1 + 68F_2}{384} \right)$$

### 9.4. Wykonanie ćwiczenia

- 1) Przymocować szalki na obciążniki do ramy.
- 2) Przymocować czujniki zegarowe, pamiętając że ściskając końcówkę czujnika powodujemy przyrost mierzonego przemieszczenia. Oznacza to, że w miejscu przyłożenia pionowej siły  $F_1$  musimy czujnik ustawić tak, aby był on wstępnie ściśnięty (czujnik powinien wskazywać najlepiej 10,0 mm przy zakresie od 0 do 20 mm).
- 3) Odczytać wskazania czujników i zapisać je w tabeli 9.1 jako pomiar 0.
- 4) Rozpocząć obciążanie ramy w sekwencji takiej jak w tabeli 9.1 – dla każdego obciążenia zapisać odczyt przemieszczenia  $f_{1exp}$  oraz  $f_{2exp}$ .

Tabela 9.1. Pomiar przemieszczeń ramy

Pomiar	Obciążenie		Przemieszczenie		Przemieszczenie	
	$F_1$	$F_2$	$f_{1exp}$	$f_{2exp}$	$ f_{1exp} - f_{1,0} $	$ f_{2exp} - f_{2,0} $
	[N]	[N]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0	0	0	$f_{1,0} =$	$f_{2,0} =$	-----	-----
1	5	0				
2	10	0				
3	15	0				
4	20	0				
5	25	0				
6	0	0	$f_{1,0} =$	$f_{2,0} =$		
7	0	5				
8	0	10				
9	0	15				
10	0	20				
11	0	25				

### 9.5. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) cel ćwiczenia,
- 2) tabelę 9.1 z wynikami pomiarów,
- 3) dla zadanego obciążenia z tabeli 9.1 wyodrębnić obciążenie oraz ugięcie i przepisać do tabeli 9.2,
- 4) obliczyć wartości ugięć według metody analitycznej i wstawić do tabeli,
- 5) obliczyć błąd względny między przemieszczeniem otrzymanym na drodze eksperymentalnej oraz przy pomocy wzorów analitycznych:

$$\Delta = \frac{f_{an} - f_{exp}}{f_{an}} \times 100\%$$

6) przeprowadzić dyskusję otrzymanych wyników.

Tabela 9.2. Ugięcia ramy dla zadanego obciążenia

	Obciążenie	Ugięcie doświadczalne	Ugięcie doświadczalne	Ugięcie obliczone	Błąd względny
Pomiar	$P$	$f_{exp}$	$ f_{exp} - f_0 $	$f_{an}$	$\Delta$
	[N]	[mm]	[mm]	[mm]	[%]
0	0	$f_0 =$	-----	-----	-----
1	5				
2	10				
3	15				
4	20				
5	25				

## Ćwiczenie 10

### BADANIE ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYNY ŚRUBOWEJ

#### 10.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest: (i) wyznaczenie skrócenia  $\lambda$  układu dwóch sprężyn o jednakowej wysokości, pracujących równolegle i ściskanych siłą  $P$ , (ii) wyznaczenie wartości sił ściskających każdą ze sprężyn, (iii) wyznaczenie modułu sprężystości postaciowej  $G$  materiału sprężyn, (iv) wyznaczenie maksymalnych naprężeń w drutach obu sprężyn.

#### 10.2. Wprowadzenie

Sprężyny, elementy sprężyste mają bardzo różnorodne zastosowanie w wielu konstrukcjach mechanicznych. Wykorzystuje się je do łączenia elementów, w sposób sprężysty tj. taki, który wymaga, aby pomiędzy łączonymi elementami istniała kontrolowana swoboda przesunięć. Elementy sprężyste wykorzystywane są również do łagodzenia wstrząsów, akumulowania lub rozpraszania energii, przekazywania sił proporcjonalnych do ugięć itp. Sprężyny wykonuje się najczęściej ze stali sprężynowej, która charakteryzuje się bardzo dużym zakresem odkształceń proporcjonalnych do obciążenia (duża wartość granicy sprężystości nawet do 1000 MPa) oraz małym zakresem pracy powyżej granicy sprężystości. Dużą podatność sprężyn otrzymuje się dzięki ich specjalnemu kształtowaniu. Sprężyny można podzielić w zależności od kształtu, przeznaczenia, stanu obciążenia i rodzaju dominujących naprężeń.



Rysunek 10.1. Sprężyny naciskowe<sup>1</sup> (a), naciągowe<sup>2</sup> (b), skrętowe<sup>3</sup> (c), spiralne<sup>4</sup> (d) i taśmowe<sup>4</sup> (e)

W związku z przeznaczeniem rozróżniamy sprężyny dociskowe (w zaworach bezpieczeństwa), napędowe (wszelkie mechanizmy zegarowe), zderzakowe (resory wagonowe, zderzaki) itp.

Ze względu na kształt i stan obciążenia wśród sprężyn można wyróżnić:

- drążki skrętne, spiralne, śrubowe skrętne – skręcane;

<sup>1</sup> <http://www.nwspring.com/compression.php> (15 listopada 2015)

<sup>2</sup> <http://www.mazowianka.pl/sprezyny-naciagowe.php> (15 listopada 2015)

<sup>3</sup> <http://www.mazowianka.pl/sprezyny-skretowe.php> (15 listopada 2015)

<sup>4</sup> <http://fedah.pl/oferta.html> (15 listopada 2015)

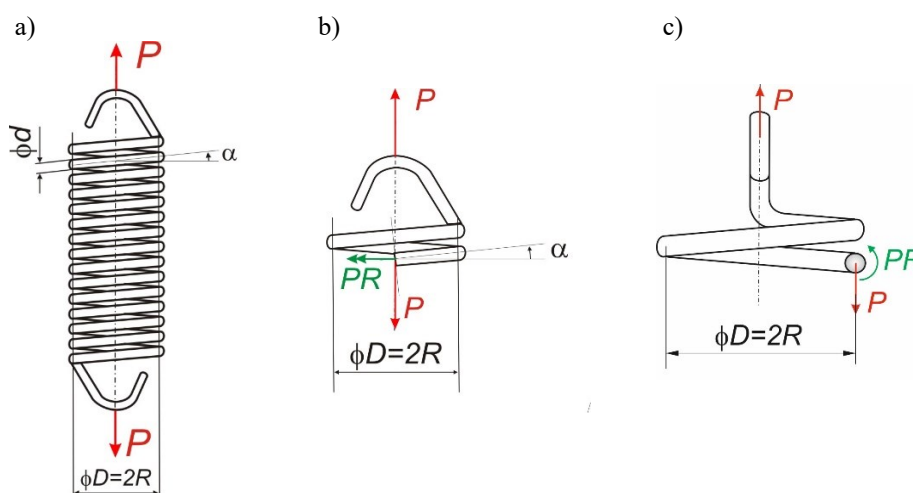
- śrubowe naciągowe – rozciąganie;
- śrubowe naciskowe, płaskie, talerzowe, przeponowe i pierścieniowe – ściskane.

Należy pamiętać, że rodzaj obciążenia w sprężynie nie zawsze idzie w parze z dominującym stanem naprężenia. Sprężyny można również podzielić ze względu na dominujący stan naprężeń, wyróżniając takie, w których dominują naprężenia:

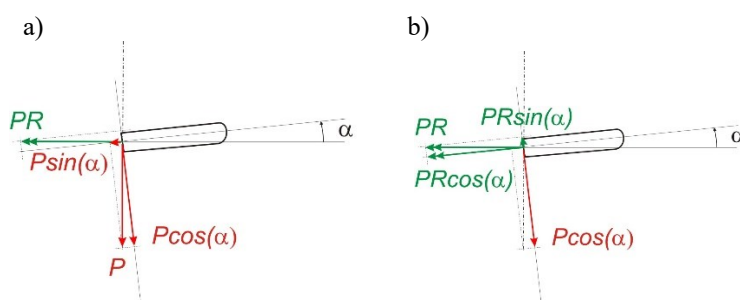
- skręcające: drążki skrętne, sprężyny śrubowe naciągowe i naciskowe;
- gnące: sprężyny płaskie, spiralne i śrubowe skrętne;
- ściskające lub rozciągające: sprężyny pierścieniowe.

W pozostałych sprężynach tj. w talerzowych i przeponowych panuje złożony stan naprężeń. Przykładowe rodzaje sprężyn pokazano na rysunku 10.1.

Ze względu na powszechne zastosowanie sprężyn, a zwłaszcza sprężyn śrubowych, zajmiemy się wyznaczaniem ich odkształceń oraz panującego stanu naprężenia. Rozpatrzmy sprężynę śrubową walcową o małym skoku  $h$  ( $\alpha < 10^\circ$ ), wykonaną z drutu o przekroju kołowym (rys. 10.2). Aby wyznaczyć stan naprężenia w drucie sprężyny śrubowej należy najpierw określić siły przekrojowe. Przecinając domyślnie drut sprężyny śrubowej (rys. 10.2 b i c) odrzucony fragment sprężyny zastępujemy odpowiednimi siłami tj. siłą  $P$  i momentem  $M_s = PR$ .



Rysunek 10.2. Naciągowa sprężyna śrubowa (a) oraz siły przekrojowe w drucie sprężyny śrubowej (b,c)



Rysunek 10.3. Rozkład siły (a) i momentu przekrojowego (b) na składowe normalne i styczne

Siły przekrojowe należy zrzutować na kierunek osi drutu sprężyny i kierunek prostopadły (rys. 10.3) wyznaczając składowe normalne w postaci siły rozciągającej  $N$  i momentu gnącego  $M_g$  oraz składowe styczne w postaci siły tnącej  $T$  i momentu skręcającego  $M_s$ :

$$\begin{aligned}
 N &= P \sin \alpha, \\
 T &= P \cos \alpha, \\
 M_s &= PR \cos \alpha, \\
 M_g &= PR \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Powyższe oznacza, że drut sprężyny śrubowej jest rozciągany, ścinany, skręcany i zginany. Biorąc pod uwagę założenie dotyczące skoku sprężyny śrubowej, czyli pochylenie linii śrubowej  $\alpha < 10^\circ$  można przyjąć (założenie dla małych kątów), że  $\cos\alpha = 1$ , a  $\sin\alpha = 0$ . Wykorzystując powyższe w równaniach (10.1) otrzymujemy:

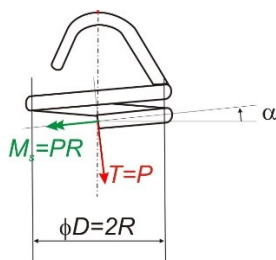
$$\begin{aligned} N &= 0, \\ T &= P, \\ M_s &= PR, \\ M_g &= 0, \end{aligned} \quad (10.2)$$

co oznacza, że drut sprężyny śrubowej jest skręcany momentem skręcającym  $M_s$  i ścinany siłą tnącą  $T$  (rys. 10.4). Takim siłom wewnętrznym odpowiadają rozkłady naprężeń, które dla jednej ze średnic przedstawione są na rysunku 10.5. Naprężenia od skręcania (rys. 10.5a) zmieniają się liniowo od wartości 0 w osi pręta do wartości maksymalnej:

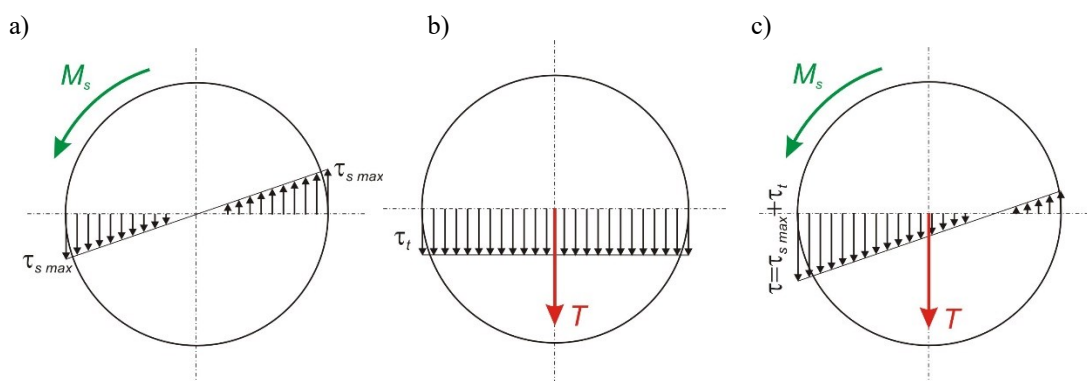
$$(\tau_s)_{\max} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{PR}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (10.3)$$

na powierzchni zewnętrznej drutu. Można przyjąć, że rozkład naprężeń ścinających jest równomierny na całej powierzchni. Rozkład naprężeń tnących wzdłuż średnicy poziomej został przedstawiony na rysunku 10.5b, gdzie wartości naprężeń można wyznaczyć ze wzoru:

$$\tau_t = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (10.4)$$



Rysunek 10.4. Dominujące siły wewnętrzne w drucie sprężyny śrubowej



Rysunek 10.5. Naprężenia skręcające (a), ścinające (b) i złożony stan naprężeń (c)

Analizując stan naprężeń można stwierdzić, że mamy do czynienia ze złożonym stanem naprężenia (rys. 10.5c). Jednakże ze względu na fakt, że składowe naprężenia maksymalne działają w jednym kierunku, to naprężenia tnące maksymalne w przekroju drutu sprężyny śrubowej można wyznaczyć jako sumę naprężeń od skręcania i naprężeń od ścinania, zgodnie z następujących równaniem:

$$\tau = (\tau_s)_{\max} + \tau_t = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (10.5)$$



Maksymalna wartość naprężeń tnących  $\tau$  występuje na poziomej średnicy drutu sprężyny śrubowej, po stronie wewnętrznej sprężyny.

Równanie (10.5) można przekształcić i zapisać w następującej postaci:

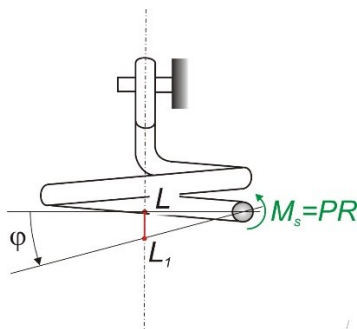
$$\tau = (\tau_s)_{\max} + \tau_t = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right), \quad (10.6)$$

gdzie w nawiasie wyszczególniony jest udział naprężeń skręcających 1 i naprężeń tnących  $d/2D$ . Biorąc pod uwagę, że średnica drutu sprężyny  $d$  jest dużo mniejsza od średnicy podziałowej sprężyny śrubowej  $D$  to stosunek tych średnic jest bliski zeru ( $d/2D \approx 0$ ). Wykorzystując powyższe w równaniu (10.6) otrzymujemy równanie pozwalające wyznaczyć maksymalne naprężenia w drucie sprężyny śrubowej w postaci:

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3}, \quad (10.7)$$

Na podstawie równania (10.7) można stwierdzić, że w drucie sprężyny śrubowej o małym skoku największą rolę odgrywają naprężenia skręcające. Drut sprężyny śrubowej jest skręcany, gdy cała sprężyna jest ściskana (sprężyna naciskowa) lub rozciągana (sprężyna naciągowa).

Zgodnie z powyższymi rozważaniami drut sprężyny śrubowej jest skręcany, tak więc wyznaczenie wydłużenia / skrócenia rozciąganej lub ściskanej sprężyny śrubowej wyznacza się w oparciu o kąt skręcenia drutu sprężyny. Rozważmy jeden zwoj sprężyny śrubowej (rys. 10.6) o długości  $l = \pi D = 2\pi R$ .



Rysunek 10.6. Wydłużenie jednego zwoju sprężyny śrubowej

Jednostkowy kąt skręcenia  $d\varphi$  odcinka drutu sprężyny ds skręcanego momentem  $M_s = PR$  można wyznaczyć na podstawie wzoru:

$$d\varphi = \frac{M_s ds}{GI_0}. \quad (10.8)$$

Dla jednego zwoju sprężyny śrubowej wzór (10.8) po scałkowaniu można zapisać w postaci:

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_0} = \frac{PR \cdot 2\pi R}{G \frac{1}{32} \pi d^4} = \frac{64PR^2}{Gd^4} = \frac{16PD^2}{Gd^4}. \quad (10.9)$$

Odchylenie odcinka OL (rys. 10.6) poprowadzonego z punktu O (środek przekroju poprzecznego drutu sprężyny) prostopadłe do osi sprężyny zmienia się o kąt  $\varphi$ , w związku z czym punkt L przesunie się do punktu  $L_1$ . Tak więc odcinek

$$LL_1 = R\varphi \quad (10.10)$$

jest wydłużeniem jednego zwoju sprężyny. W celu wyznaczenia wydłużenia  $\lambda$  sprężyny o  $n$  liczbie zwojów należy skorzystać z zależności:

$$\lambda = n|LL_1| = nR\varphi. \quad (10.11)$$

Podstawiając (10.9) do (10.11) otrzymujemy równanie na wydłużenie / skrócenie sprężyny śrubowej:

$$\lambda = nR\varphi = nR \frac{16PD^2}{Gd^4} = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}, \quad (10.12)$$

gdzie:  $n$  jest liczbą zwojów sprężyny,  $D$  [mm] jest średnicą podziałową sprężyny,  $d$  [mm] to średnicą drutu sprężyny,  $P$  [N] to siłą rozciągającą sprężynę i  $G$  [MPa] jest modułem sprężystości postaciowej materiału sprężyny.

Wzór (10.12) można wykorzystać w badaniach doświadczalnych do wyznaczenia modułu sprężystości postaciowej materiału drutu sprężyny mierząc zmianę długości sprężyny dla danego obciążenia, zakładając, że znamy jej wymiary geometryczne i liczbę zwojów.

W zastosowaniach inżynierskich często operuje się wielkością zwaną stałą sprężyny  $c$ . Stała sprężyny jest współczynnikiem proporcjonalności w zależności pomiędzy obciążeniem  $P$  a wydłużeniem  $\lambda$ :

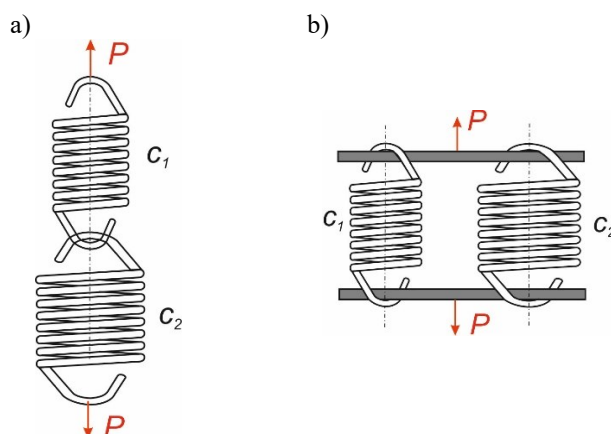
$$P = c\lambda. \quad (10.13)$$

Zależność (10.13) zwana jest charakterystyką sprężyny. Porównując równania (10.12) i (10.13) można wyprowadzić równanie pozwalające wyznaczyć stałą sprężyny  $c$  na podstawie jej wymiarów geometrycznych i stałych materiałowych:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \Rightarrow P = \frac{Gd^4}{8D^3n}\lambda \Rightarrow c = \frac{Gd^4}{8D^3n}. \quad (10.14)$$

Stała  $c$  nosi nazwę sztywności sprężyny lub stałej sprężyny i jest liczbowo równa wartości siły rozciągającej lub ściskającej sprężynę, wywołującej jednostkową zmianę jej długości.

Sprężyny śrubowe można łączyć ze sobą uzyskując dla układu sprężyn nową wartość podatności lub sztywności. Wielkością, która definiuje podatność sprężyny jest stała sprężyny  $c$ . Znając stałe poszczególnych sprężyn można wyznaczyć stałą układu sprężyn połączonych szeregowo (rys. 10.7a) lub równoległe (rys. 10.7b).



Rysunek 10.7. Połączenie szeregowo (a) i równoległe (b) dwóch sprężyn o stałych  $c_1$  i  $c_2$

W dwóch sprężynach o stałych  $c_1$  i  $c_2$  połączonych szeregowo występują te same siły ściskające  $P = P_1 = P_2$ , a całkowite skrócenie (wydłużenie) równe jest sumie skróceń (wydłużeń) poszczególnych sprężyn  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Biorąc powyższe pod uwagę, można wyprowadzić wzór na wyznaczenie stałej zastępczej  $c_z$  układu sprężyn połączonych szeregowo.

Wiedząc, że:

$$\lambda = \frac{P}{c_z}, \quad \lambda_1 = \frac{P_1}{c_1}, \quad \lambda_2 = \frac{P_2}{c_2}, \quad (10.15)$$

dla układu sprężyn połączonych szeregowo można zapisać:

$$\frac{P}{c_z} = \frac{P_1}{c_1} + \frac{P_2}{c_2}. \quad (10.16)$$

Wykorzystując równość sił ściskających sprężyn połączonych szeregowo ( $P = P_1 = P_2$ ) równanie (10.16) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{c_z} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}, \quad (10.17)$$

które pozwala na wyznaczenie zastępczej sztywności  $c_z$  dla dwóch sprężyn o stałych  $c_1$  i  $c_2$  połączonych szeregowo (rys. 10.7a).

W przypadku gdy dwie sprężyny o stałych  $c_1$  i  $c_2$  połączone są równoległe to skrócenie (wydłużenie) obu sprężyn jest jednakowe  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , a siła ściskająca (rozciągająca) układ sprężyn jest sumą sił ściskających (rozciągających) poszczególne sprężyny  $P = P_1 + P_2$ . Powyższe pozwala na wyprowadzenie zależności na stałą zastępczą  $c_z$  układu sprężyn połączonych równoległe:

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow \lambda c_z = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2. \quad (10.18)$$

Wiedząc, że skrócenie każdej sprężyny i układu są jednakowe to równanie (10.18) można zapisać w postaci:

$$c_z = c_1 + c_2. \quad (10.19)$$

Równanie (10.19) pozwala wyznaczyć zastępczą stałą  $c_z$  układu dwóch sprężyn połączonych równoległe.

### 10.3. Badany układ sprężyn

Wymiary sprężyn, dla których przeprowadzono obliczenia szczegółowe, zaznaczono na rys. 10.8. Skrócenie układu złożonego z dwóch sprężyn (rys. 10.8) pod wpływem siły ściskającej  $P$  określimy doświadczalnie. Po wyznaczeniu skrócenia  $\lambda$  układu sprężyn będzie można przystąpić do określenia wartości sił ściskających poszczególne sprężyny. Przyjęto następujące oznaczenia:

$P_z, P_w$  – siły ściskające sprężynę wewnętrzną i zewnętrzną,

$D_z, D_w$  – średnice podziałowe: sprężyn zewnętrznej i wewnętrznej,

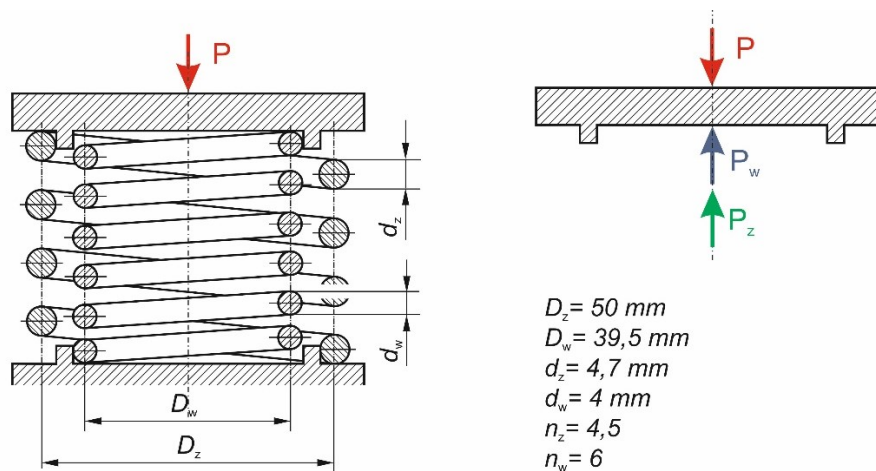
$d_z, d_w$  – średnice drutu sprężyn: zewnętrznej i wewnętrznej,

$n_z, n_w$  – liczba zwojów sprężyn: zewnętrznej i wewnętrznej,

$G_z, G_w$  – moduł sprężystości postaciowej sprężyn: zewnętrznej i wewnętrznej.

Przy tych oznaczeniach odkształcenia obu sprężyn można wyrazić w postaci:

- skrócenie sprężyny zewnętrznej,
- skrócenie sprężyny wewnętrznej,



Rysunek 10.8. Badany układ sprężyn z wymiarami

Z warunków równowagi nieodkształcalnej płyty, za pomocą której ściskamy sprężyny (rys. 10.8), otrzymujemy:

$$P = P_z + P_w. \quad (10.20)$$

Ponieważ zadanie jest statycznie niewyznaczalne, dodatkowe równanie otrzymamy z zależności geometrycznych między odkształceniami. W naszym przypadku odkształcenia (skrócenia, patrz równanie 10.12) obu sprężyn są równe  $\lambda_w = \lambda_z$ , więc

$$\frac{8P_w D_w^3 n_w}{G_w d_w^4} = \frac{8P_z D_z^3 n_z}{G_z d_z^4}. \quad (10.21)$$

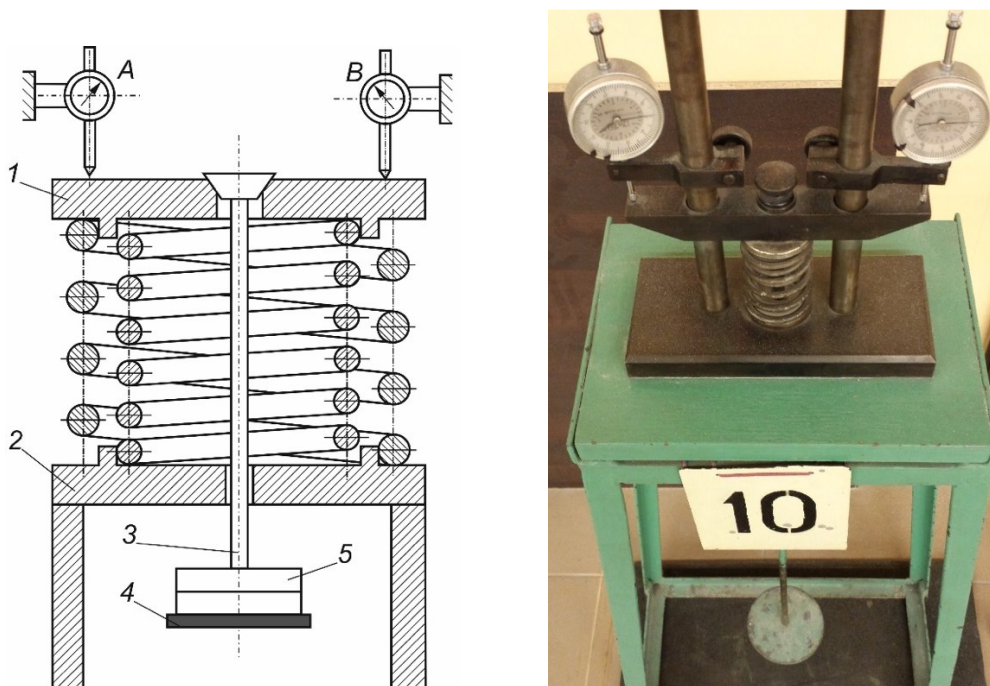
Rozwiązując układ równań (10.20) i (10.21) przy założeniu, że obie sprężyny wykonane są z tego samego materiału (mają identyczną wartość modułu sprężystości postaciowej  $G = G_z = G_w$ ), otrzymujemy szukane wartości sił  $P_z$  i  $P_w$ :

$$P_w = P \frac{D_z^3 d_w^4 G_w n_z}{D_z^3 d_w^4 G_w n_z + D_w^3 d_z^4 G_z n_w} = \frac{P}{1 + \left(\frac{D_w}{D_z}\right)^3 \left(\frac{d_z}{d_w}\right)^4 \frac{n_w}{n_z}}, \quad (10.22)$$

$$P_z = P - P_w.$$

#### 10.4. Opis urządzenia

Urządzenie pozwalające na doświadczalne określenie skrócenia sprężyn (lub sprężyny pojedynczej) pod wpływem działania siły ściskającej przedstawiono schematycznie na rys. 10.9. Nieodkształcalna płyta 1 spoczywa swobodnie na sprężynach ustawionych na podstawie 2 urządzenia. Z płytą 1 połączony jest pręt 3, którego dolny koniec zakończony jest szalką 4, na którą można wkładać obciążniki 5. O krawędzie płyty opierają się dwa ustawione naprzeciw siebie czujniki A i B. Pod wpływem położonych na szalkę 4 obciążników płyta 1 przesunie się w dół, a na skalach czujników można odczytać odpowiadające danemu obciążeniu przemieszczenia tych punktów płyty 1, o które opierają się nóżki czujników. Jako odkształcenie układu należy przyjąć średnią arytmetyczną obu wskazań. Tym samym eliminujemy błąd, który mógłby być spowodowany „skoszeniem” płyty.



Rysunek 10.9. Stanowisko badawcze do badania skrócenia sprężyny lub układu sprężyn

W rozpatrywanym przypadku wartość odkształcenia układu złożonego z dwóch sprężyn (rys. 10.9) wyznaczymy obciążając i odciążając go kolejno, co 25 N obciążnikami o ciężarze od 100 do 225 N.

U w a g a. Układem wyjściowym, dla którego określamy odkształcenia, jest układ dwóch sprężyn wraz z obciążającą je płytą 1, prętem 3 oraz szalką 4 — patrz rys. 10.9. Nie uwzględniamy więc odkształcenia wstępnego sprężyn, spowodowanego łącznym ciężarem elementów 1, 3 i 4.

Przy każdej zmianie obciążenia wyniki pomiarów należy zapisać w tabeli 10.1. Różnica kolejnych średnich odczytów daje odkształcenie układu sprężyn spowodowane przyrostem siły  $\Delta P = 25$  N. Średnią wartość odkształcenia układu sprężyn pod wpływem zmiany obciążenia o  $\Delta P = 25$  N wyznaczymy ze wzoru:

$$\lambda_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n} \quad (10.23)$$

gdzie  $\sum_{i=1}^n e_i$  jest sumą średnich wartości ugięć,  $n$  – liczbą średnich wartości ugięcia.

Tabela 10.1. Tablica z wynikami pomiarów

Lp.	Obciążenie N	Wskazania czujnika		Różnica wskazań czujnika mm		Średnia wartość ugięcia mm $c_i = \frac{ c  +  d }{2}$
		mm		Lewego	Prawego	
		Lewego $A_i$	Prawego $B_i$	Lewego $c = A_{i+1} - A_i$	Prawego $d = B_{i+1} - B_i$	
1	100					
2	125					
3	150					
4	175					
5	200					
6	225					
7	200					
8	175					
9	150					
10	125					
11	100					
				$\Sigma e =$		

### 10.5. Wykonanie ćwiczenia

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) dane wyjściowe do pomiarów i obliczeń,
- 2) wyprowadzenie wzoru na wydłużenie sprężyny śrubowej,
- 3) wyniki pomiarów w tablicy,
- 4) wyznaczenie wartości sił ściskających każdą ze sprężyn,
- 5) wyznaczenie modułu sprężystości postaciowej  $G$  materiału sprężyn,
- 6) wyznaczenie maksymalnych naprężeń i wskazanie w której ze sprężyn one występują.

## Ćwiczenie 11

### LINIA UGIĘCIA BELKI

#### 11.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie linii ugięcia belki swobodnie podpartej obciążonej pionowymi siłami skupionymi oraz porównanie wyników z rozwiązaniem analitycznym. Ponadto, ćwiczenie ma na celu sprawdzenie przy użyciu wzorów teoretycznych czy maksymalne naprężenia gnące występujące w badanym elemencie nie przekroczyły wartości naprężeń dopuszczalnych.

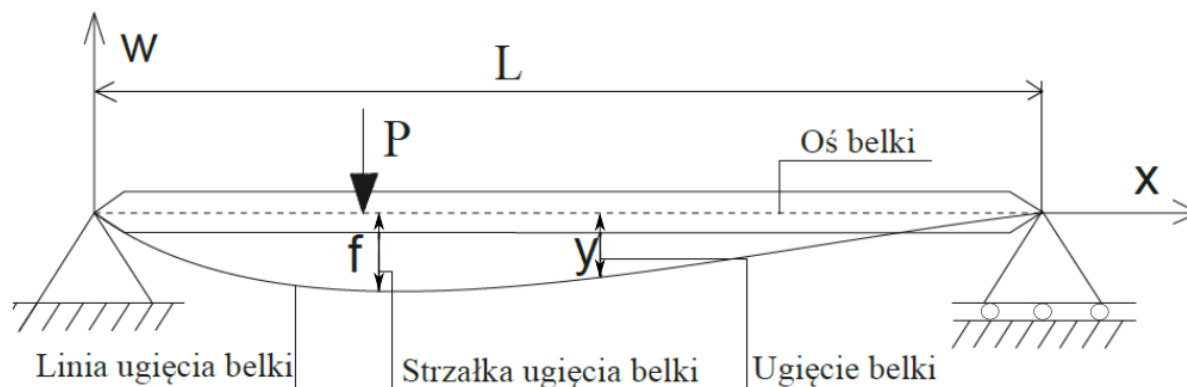
#### 11.2. Wprowadzenie

Podczas projektowania elementu zginanego konstrukcji, należy dokonać doboru kształtu i wymiarów przekroju poprzecznego belki w taki sposób, aby spełnione zostały dwa podstawowe warunki:

- warunek wytrzymałości – największe naprężenia w przekrojach, wywołane obciążeniem zewnętrznym nie mogą przekraczać wartości dopuszczalnych  $\sigma \leq k_g$ ,
- warunek sztywności – odkształcenia sprężyste belki nie mogą przewyższać wartości ustalonych odpowiednimi przepisami dla danego typu konstrukcji. Przyjmuje się, że w zależności od rodzaju i przeznaczenia konstrukcji dopuszczalne ugięcie belki  $f$  nie powinno przekraczać  $0.001L - 0.005L$ , gdzie  $L$  jest rozpiętością belki.

#### 11.3. Podstawy teoretyczne

Belka pod obciążeniem odkształca się (Rys. 11.1). Początkowo prostoliniowa oś belki zmienia się na krzywoliniową, która nazywa się *linią ugięcia osi belki*. Przemieszczenie środka ciężkości przekroju w kierunku prostopadłym do osi belki nazywamy *ugięciem belki* ( $w(x)$ , gdzie  $0 \leq x \leq L$ ) w rozpatrywanym przekroju, a największe ugięcie – *strzałką ugięcia* ( $f$ ) belki.



Rysunek 11.1. Przemieszczenie belki pod wpływem zewnętrznego obciążenia.

Analizując odkształcenia belki poddanej czystemu zginaniu można stwierdzić, że na skutek działania momentu  $M_g$  oś belki ugina się, a jej promień krzywizny określony jest wzorem:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_g}{EI_z} \quad (11.1)$$

gdzie:

$M_g$  - moment gnący [Nmm],

$E$  – moduł Younga [MPa],

$I_z$  – moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej [mm<sup>4</sup>],

We wzorze tym zakłada się stałą sztywność na rozpatrywanym odcinku belki ( $EI_z = \text{const.}$ ) oraz pomija się wpływ sił poprzecznych na jej odkształcenie. Iloczyn  $EI_z$  zwany jest *sztywnością belki na zginanie*. Im jest on większy (zależy od rodzaju materiału belki oraz przekroju poprzecznego) tym belka jest bardziej sztywna (mniej podatna na ugięcia) i odwrotnie.

Wykorzystując znaną z geometrii różniczkowej zależność na krzywiznę dowolnej linii płaskiej:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{w''}{\sqrt{[1+(w')^2]^3}} \quad (11.2)$$

Możemy po podstawieniu do wzoru (11.1) znaleźć równanie różniczkowe osi odkształconej belki:

$$\frac{M_g}{EI_z} = \pm \frac{w''}{\sqrt{[1+(w')^2]^3}} \quad (11.3)$$

Całkowanie powyższego równania jest zazwyczaj kłopotliwe. W przypadku zginania belek, gdy w żadnym punkcie belki naprężenia nie przekraczają granicy proporcjonalności  $\sigma_{prop}$ , tj. granicy stosowalności prawa Hooke'a, kąt nachylenia stycznej do osi ugiętej (mierzony w radianach) jest mały, zatem wielkość  $(w')^2$  można traktować jako małą w porównaniu z jednością. Wobec tego mianownik we wzorze (11.3) można przyjąć równy jedności, a równanie uprościć do postaci:

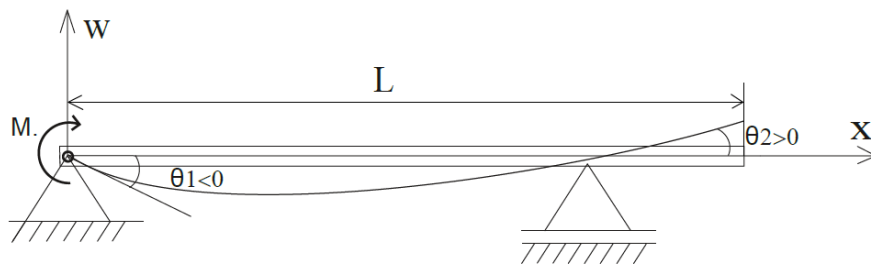
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_g}{EI_z} \quad (11.4)$$

Wyrażenie  $w=w(x)$  jest funkcją ugięcia belki. Zakładając, że oś  $w$  skierowana jest do góry, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_g}{EI_z} \quad (11.5)$$

Po scałkowaniu równania (11.5) otrzymujemy kąty nachylenia stycznej  $w'$  ( $\theta$ ) o wartościach dodatnich dla tej części linii ugięcia, których styczne tworzą dodatni (tj. odmierzony zgodnie z kierunkiem trygonometrycznym) kąt z dodatnim kierunkiem osi  $x$  (Rysunek 11.2). W wyniku ponownego scałkowania równania (11.5) otrzymamy równanie linii ugięcia  $w=f(x)$ . Dwukrotnie

całkowanie równania (11.5) powoduje pojawienie się dwóch stałych całkowania, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.



Rysunek 11.2. Oznaczenia osi współrzędnych i kątów  $\theta$  osi ugiętej belki.

Równanie to, zwane *równaniem różniczkowym osi odkształconej*, możemy zapisać następująco:

$$EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} = M_g \quad (11.6)$$

#### 11.4. Metody wyznaczania ugięć belki

Istnieje wiele metod pozwalających na wyznaczenie linii ugięcia belki takie jak np.:

- Metoda analityczna
- Metoda Clebscha
- Twierdzenie Castigliano

W tym ćwiczeniu laboratoryjnym, prowadzący określa którą metodą należy policzyć ugięcia belki.

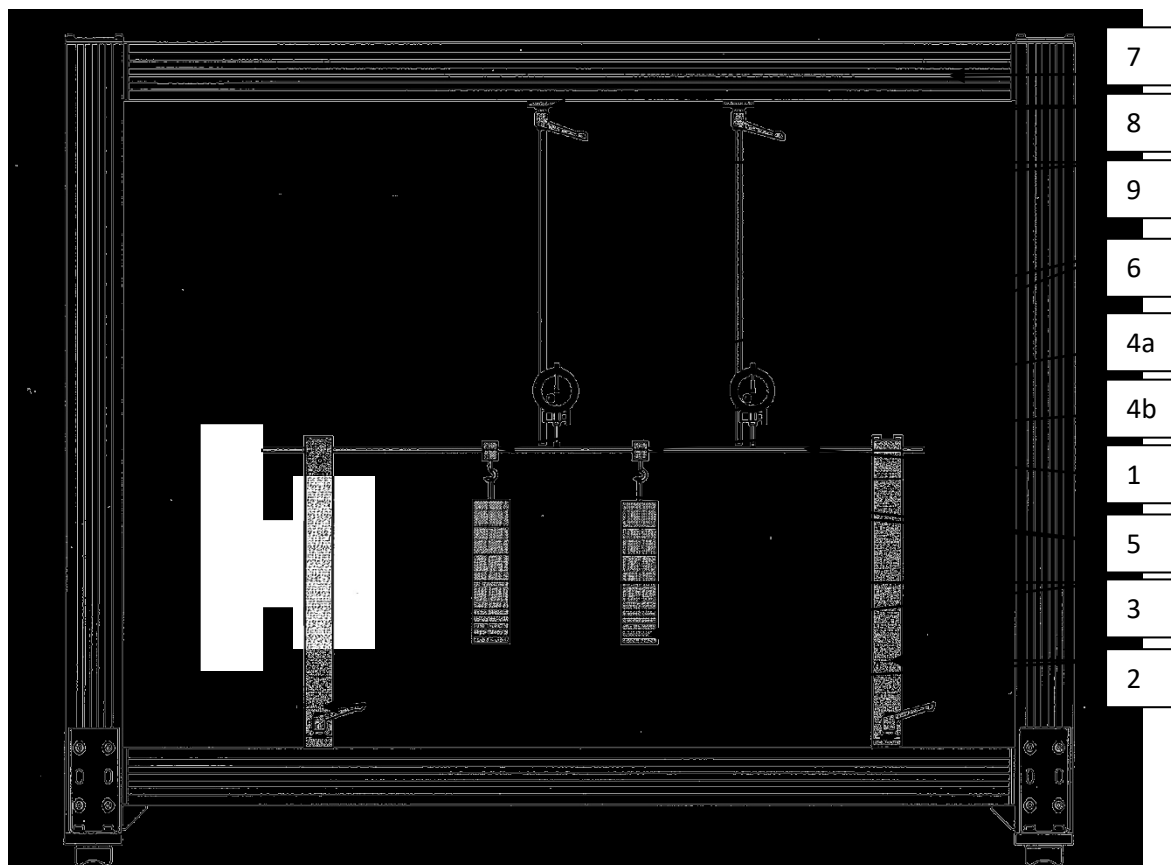
#### 11.5. Schemat i opis stanowiska

Badania doświadczalne prowadzimy na stanowisku (Rysunek 11.3) składającym się z belki (1) o stałej sztywności na zginanie i długości  $L$ . Na stanowisku laboratoryjnym dostępne są trzy belki różniące się wymiarami geometrycznymi oraz materiałem, z którego zostały wykonane:

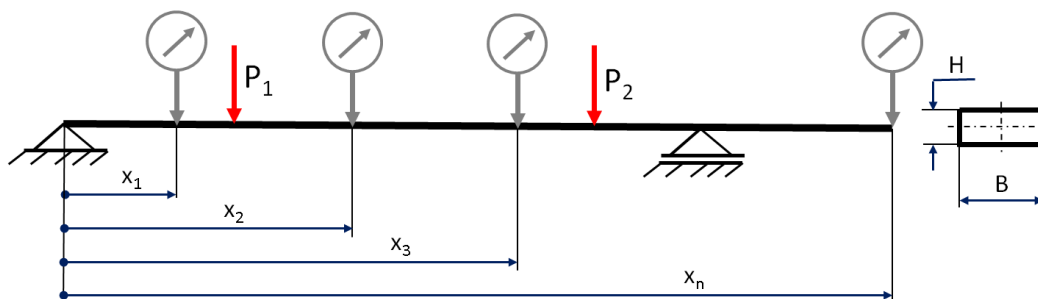
- a) belka stalowa o wymiarach [szerokość (B) x wysokość (H) x długość (L)] [20mm x 4mm x 1000mm] i module Younga  $E = 210$  GPa,  $k_g = 150$  MPa.
- b) belka mosiężna o wymiarach [szerokość (B) x wysokość (H) x długość (L)] [20mm x 6mm x 1000mm] i module Younga  $E = 104$  GPa,  $k_g = 150$  MPa.
- c) belka aluminiowa o wymiarach [szerokość (B) x wysokość (H) x długość (L)] [20mm x 6mm x 1000mm] i module Younga  $E = 69$  GPa,  $k_g = 165$  MPa.

Belka jest swobodnie podparta (2) w punktach A i B (przykładowe stanowisko pokazano na rysunku 11.3) oraz obciążona odważnikami (3). Obciążenie wprowadzane jest w następujący sposób: na suwaku (4a) zamocowanym na belce umieszczana jest szalka (5), a na niej odważniki (3) o określonych ciężarach. Do pomiaru ugięć belki używa się czujników zegarowych przemieszczeń (6), które przymocowane są do ramy (7) przy pomocy śrub (8). Luzując śruby (8) i przesuując uchwyty czujników (9) można zmieniać punkt, w którym dokonywany jest pomiar ugięcia belki. Wartości sił obciążających i wymiary belki muszą być tak dobrane, aby w czasie badań nie została przekroczona granica stosowności prawa Hooke'a. Ponadto ugięcia belki spowodowane naciskami sprężyn czujników powinny być małe w porównaniu z ugięciami wywołanymi przez obciążenia zasadnicze.





Rysunek 11.3. Stanowisko pomiarowe.



Rysunek 11.4. Schemat przykładowego stanowiska pomiarowego.

Schemat przykładowego stanowiska pomiarowego przedstawiono na rysunku 11.4. Badaniu poddana jest belka o całkowitej długości  $L$  i stałym przekroju poprzecznym podparta w dwóch punktach. Belka obciążona jest jedną lub dwiema siłami skupionymi znajdującymi się na dowolnych długościach. Pomiar ugięcia belki dokonywany jest za pomocą czujników zegarowych w danych punktach pomiarowych zgodnych z kartą sprawozdania. Pomiary ugięć belki powinny się być przeprowadzone w co najmniej czterech punktach pomiarowych.

### 11.6. Przebieg ćwiczenia

**W tygodniu poprzedzającym** wykonanie ćwiczenia, prowadzący zadaje pracę indywidualną, polegającą na wyznaczeniu ugięć dla belki wykonanej z **podanego materiału** oraz **zadaną metodą**. Rozwiązanie zadania przed laboratorium jest **warunkiem koniecznym do dopuszczenia do wykonywania ćwiczenia**.

**Grupa laboratoryjna nr 1** realizuje zadanie z wykorzystaniem belki **stalowej** i wyznacza ugięcia belki przy użyciu metody **Clebsha**.

**Grupa laboratoryjna nr 2** realizuje zadanie z wykorzystaniem belki **stalowej** i wyznacza ugięcia belki przy użyciu twierdzenia **Castigliano**.

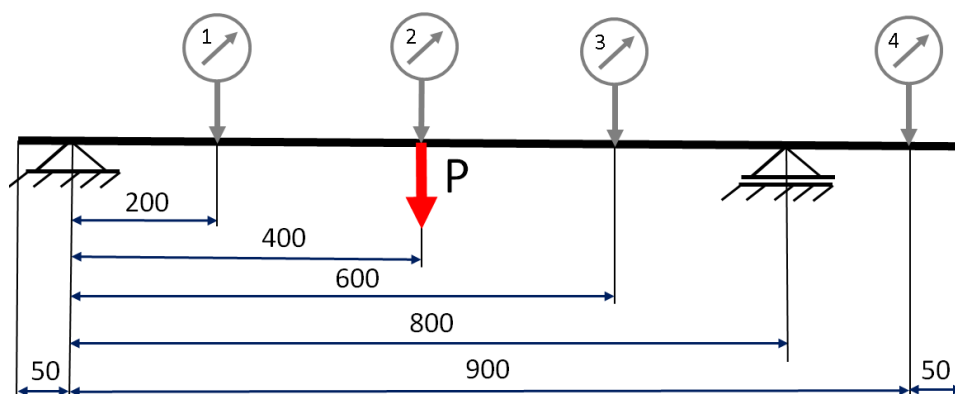
**Grupa laboratoryjna nr 3** realizuje zadanie z wykorzystaniem belki **mosiężnej** i wyznacza ugięcia belki przy użyciu metody **Clebsha**.

**Grupa laboratoryjna nr 4** realizuje zadanie z wykorzystaniem belki **mosiężnej** i wyznacza ugięcia belki przy użyciu twierdzenia **Castigliano**.

**Grupa laboratoryjna nr 5** realizuje zadanie z wykorzystaniem belki **aluminiowej** i wyznacza ugięcia belki przy użyciu metody **Clebsha**.

**Grupa laboratoryjna nr 6** realizuje zadanie z wykorzystaniem belki **aluminiowej** i wyznacza ugięcia belki przy użyciu twierdzenia **Castigliano**.

Schemat statyczny belki – należy obliczyć ugięcia w punktach 1,2,3 oraz 4. W przypadku punktu 4, (dla 900 mm) należy obliczyć kąt ugięcia dla prawej podpory, który po przemnożeniu przez odległość 100 mm pozwoli na wyznaczenie wartości ugięcia:



Rysunek 11.5. Schemat stanowiska pomiarowego dla wszystkich grup realizujących ćwiczenie

**W trakcie wykonywania** ćwiczenia należy:

- Umieścić badaną belkę na stanowisku pomiarowym,
- Podpory przymocowane są do ramy przy pomocy śrub zaciskowych. Luzując śruby zaciskowe, można zmieniać położenie podpór. Obciążenie belki jest realizowane przy użyciu suwaków. Suwaki mocowane są na belce w odpowiednim położeniu, a następnie na suwakach montowane są szalki z obciążnikami.
- Włączyć czujniki przemieszczeń.
- Ustawić czujniki zegarowe przemieszczeń w punktach pomiarowych **200 mm, 400 mm, 600 mm** (punkty odległe od lewej podpory) oraz **100 mm** (punkt odległy od prawej podpory).
- Zapisać wskazania czujników pomiarowych dla nieobciążonej belki.

- Obciążyć belkę obciążeniem **10 N** przyłożoną w środku belki (między podporami) przez łagodne założenie szalki oraz obciążników i odczytać pomiar wartości wskazania czujników. Różnica wskazań czujników dla belki obciążonej i nieobciążonej pozwala wyznaczyć wartości ugięć.
- Odciążyć belkę.
- Sporządzić wykres ugięcia w funkcji odległości od lewego krańca belki  $w_d(x)$  (uwzględnić, że w punktach podparcia ugięcie belki wynosi  $w=0$ ).
- Na wykres przedstawiający wyniki badań laboratoryjnych nanieść krzywą teoretyczną  $w_t(x)$ . **Aby wyznaczyć krzywą teoretyczną należy wyznaczyć wartości ugięć belki w punktach pomiarowych. W przypadku wyznaczenia ugięcia belki dla czwartego punktu (dla 900 mm) należy obliczyć kąt ugięcia dla prawej podpory, który po przemnożeniu przez odległość 100 mm pozwoli na wyznaczenie wartości ugięcia.**
- Obliczyć względny błąd pomiarowy dla każdego punktu pomiarowego.
- Sprawdzić, czy w trakcie wykonywania badań nie zostały przekroczone naprężenia dopuszczalne na zginanie. W tym celu poprzez wskazanie maksymalnego momentu gnącego, wyznaczyć maksymalną wartość naprężeń gnących i odnieść ją do naprężeń dopuszczalnych  $k_g$ .

### 11.7. Przygotowanie sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

- Cel ćwiczenia.
- Schemat stanowiska pomiarowego wraz z określeniem wielkości charakterystycznych (materiał i wymiary belki, odległości obciążeń i podpór, wielkość obciążenia).
- Wyniki pomiarów laboratoryjnych.
- Tabelę, według podanego poniżej wzoru, zawierającą wielkości ugięcia wyznaczone doświadczalnie i obliczone z wzorów teoretycznych.

L.p.	$x_i$ [mm]	Wartości ugięć		Błąd względny
		Pomiary laboratoryjne	Obliczenia teoretyczne	$\frac{w_t - w_d}{w_t} * 100$
		[mm]	[mm]	[%]
1				
2				
3				
4				
5				
6				

- Wykres linii ugięcia belki sporządzony na papierze milimetrowym – porównanie wyników badań laboratoryjnych i obliczeń teoretycznych.
- Dyskusję otrzymanych wyników: ocenę uzyskanych wyników pomiarów i obliczeń, ocenę przyjętej metody badań, uwagi i wnioski.

- Wyprowadzenie wzoru opisującego linię ugięcia belki oraz obliczenia wartości ugięć, a także wyznaczenie maksymalnych momentów zginających i naprężeń występujących w belce podczas badań.

### **Literatura**

[1] M.E. Niezgodziński, T. Niezgodziński.: Wytrzymałość materiałów. PWN, Warszawa, 1979.

[2] M.E. Niezgodziński, T. Niezgodziński.: Wzory wykresy i tablice wytrzymałościowe. WNT, Warszawa, 2004.

[3] P. Jastrzębski, J. Mutermilch, W. Orłowski, Wytrzymałość materiałów, Arkady, Warszawa 1985,

**Ćwiczenie 12:**

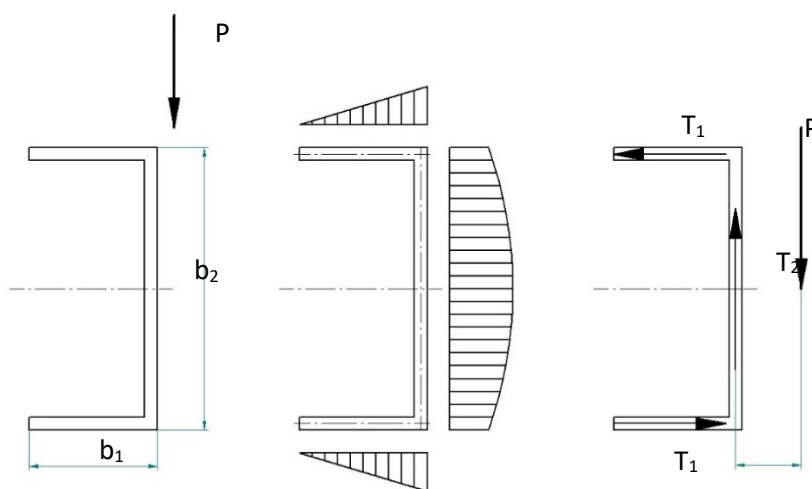
***W PRZYGOTOWANIU***

## Ćwiczenie 13

### WYZNACZANIE POŁOŻENIA ŚRODKA SIŁ POPRZECZNYCH

#### 13.1 Wprowadzenie

Jeżeli siły poprzeczne przyłożone do belki zginanej leżą w płaszczyźnie zawierającej oś belki i jedna z dwu głównych osi centralnych jej przekroju poprzecznego, mamy wtedy do czynienia z przypadkiem zginania płaskiego, tzn. oś odkształconej belki znajduje się w płaszczyźnie działania momentu gnącego. Jeżeli os centralna jest jednocześnie osią symetrii przekroju, to belka jest zginana i ścinana. W przypadku przekroju niesymetrycznego lub mono- symetrycznego ( o jednej osi symetrii) występuje efekt skręcania, wynikający z rozkładu naprężeń tnących, pochodzących od siły tnącej (Rys.1). Efekt skręcania nie wystąpi, jeżeli linia działania siły poprzecznej działającej na belkę będzie przechodzić przez punkt zwany środkiem sił poprzecznych, albo środkiem ścinania. Spełniony będzie wówczas warunek (1) .



Rys. 1. Rozkład naprężeń tnących w przekroju belki zginanej

$$Pe = T_1 \cdot h \quad (1)$$

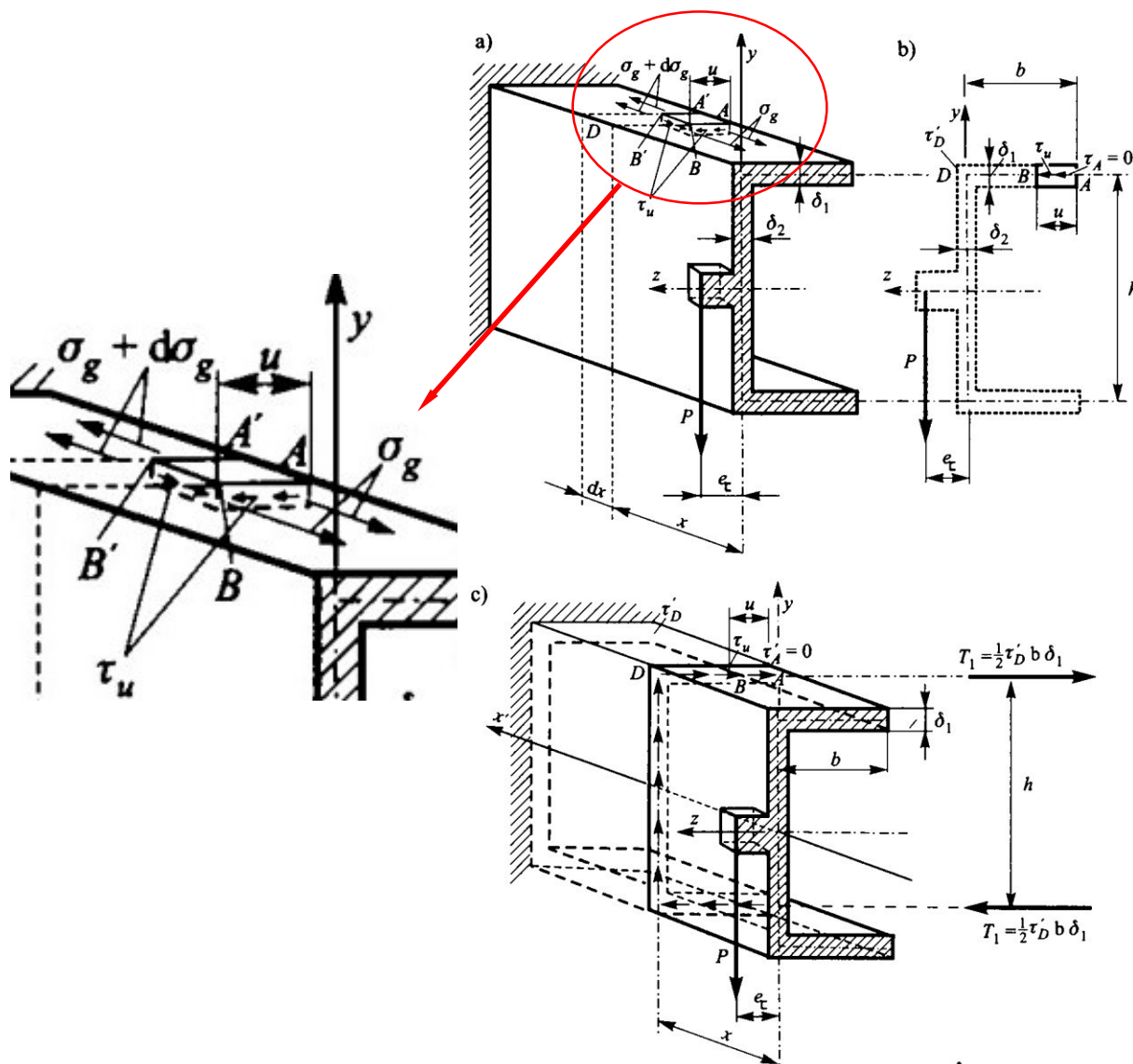
#### 13.2 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie środka sił poprzecznych dla dwóch wspornikowych belek cienkościennych o przekrojach: ceowym i kątowym oraz porównanie otrzymanych wyników z wynikami obliczeń teoretycznych.

## 13.3 Obliczenia teoretyczne

## Belka o przekroju ceowym

Na rys. 2 pokazano belkę wspornikową o przekroju ceowym obciążoną siłą  $P$  (rys.2a) oraz trajektorie naprężeń tnących i wypadkowe siły tnące w półkach przekroju (rys. 2c) – dla przypadku, gdy belka nie doznaje skręcania.



Rys. 2. Belka wspornikowa o przekroju ceowym obciążona siłą poprzeczną.

Ponieważ półki są stosunkowo cienkie ( $\delta_1 \ll h$ ,  $h = h_s r$ ), możemy założyć, że normalne naprężenia tnące w półkach są stałe na ich grubości i wynoszą:

$$\sigma_g = \frac{0,5 \cdot h \cdot M_b}{J_z} \quad (2)$$

Suma rzutów sił na oś  $x$ , działających na wycięty z półki element o wymiarach jak na rys. 2a, ma postać:

$$\sum P_x = -(\delta_1 u)\sigma_g + (\delta_1 u)(\sigma_g + d\sigma_g) - (\delta_1 dx)\tau_u = 0,$$

Stąd:

$$\tau_u = \frac{d\sigma_g}{dx} u \quad (3)$$

Biorąc pod uwagę (2) oraz zależność:

$$\sigma_g = \frac{M_g h/2}{I_z}.$$

Po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu, że  $\frac{dM_g}{dx} = T$ , otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma_g}{dx} = \frac{dM_g}{dx} \frac{h}{2I_z} = \frac{Th}{2I_z}$$

Podstawiając  $\frac{d\sigma_g}{dx}$  do wzoru (3) otrzymujemy:

$$\tau_u = \frac{d\sigma_g}{dx} \cdot u = \frac{Thu}{2I_z} \quad (4)$$

$I_z$  oznacza moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej  $z$ :

$$I_z = 2 \left[ \frac{b\delta_1^3}{12} + (b\delta_1) \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{\delta_2 h^3}{12}$$

Ponieważ  $\delta_1 \ll h$ , można więc przyjąć, że  $\frac{b\delta_1^3}{12} \approx 0$ , i wówczas:



$$I_z = \frac{h^2}{2} \left( \delta_1 b + \frac{1}{6} \delta_2 h \right) \quad (5)$$

Na rys. 2a widzimy, że naprężenie tnące tu zmienia się w półce liniowo od zera do wartości maksymalnej:

$$\tau_u = \frac{P}{h(\delta_1 b + \frac{1}{6} \delta_2 h)} u \quad (6)$$

$$\tau'_D = \tau_{u=b} = \frac{Pb}{h(\delta_1 b + \frac{1}{6} \delta_2 h)} \quad (7)$$

Na rys. 2b pokazano, że linia działania siły  $P$  przechodzi przez środek sił poprzecznych, w odległości  $e_c$  od osi  $y$  – nie ma efektu skręcania. Zatem równanie momentów względem osi  $x'$  pokazanej na rys. 2c ma postać:

$$\sum M_{x'} = P e_c - T_1 \cdot h = 0 \quad (8)$$

$T_1$  jest wypadkową naprężeń  $\tau_u$  występujących w przekroju jednej półki:

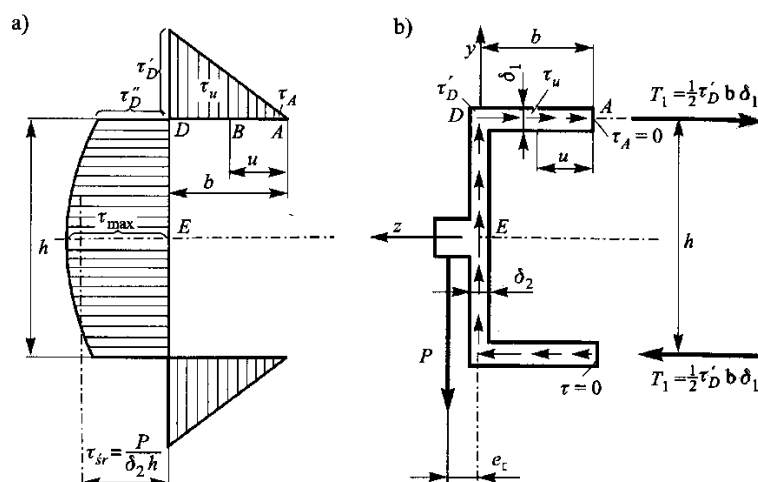
$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \tau'_D \cdot b \cdot \delta_1 \quad (9)$$

Uwzględniając (9) i (7) w (8) otrzymujemy końcowy wzór:

$$e_c = T_1 \cdot \frac{h}{P} = \frac{0,5 \cdot b}{1 + \frac{1}{6} \frac{\delta_2 \cdot h}{\delta_1 \cdot b_1}} = \frac{0,5 \cdot b}{1 + \frac{1}{6} \frac{A_{sr}}{A_p}} \quad (10)$$

gdzie:  $A_{sr}$  – pole przekroju środnika,  $A_p$  - pole przekroju półki. Ze wzoru (10) wynika, że:

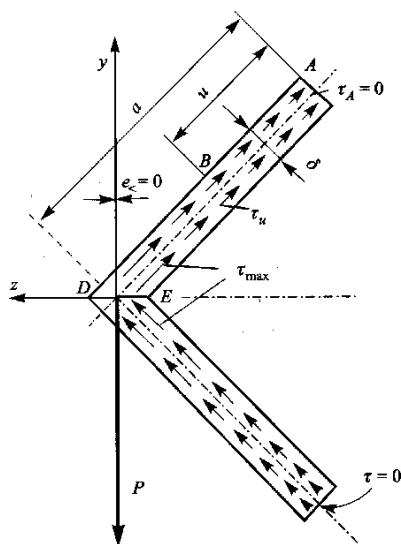
- dla  $A_p = 0$   $e_c = 0$ ,
- dla  $A_p \rightarrow \infty$   $e_c = b/2$ .



Rys. 2. Belka wspornikowa o przekroju ceowym obciążona siłą poprzeczną:

- a) – rozkład naprężeń tnących w przekroju poprzecznym,
- b) – trajektorie i rozkład sił tnących

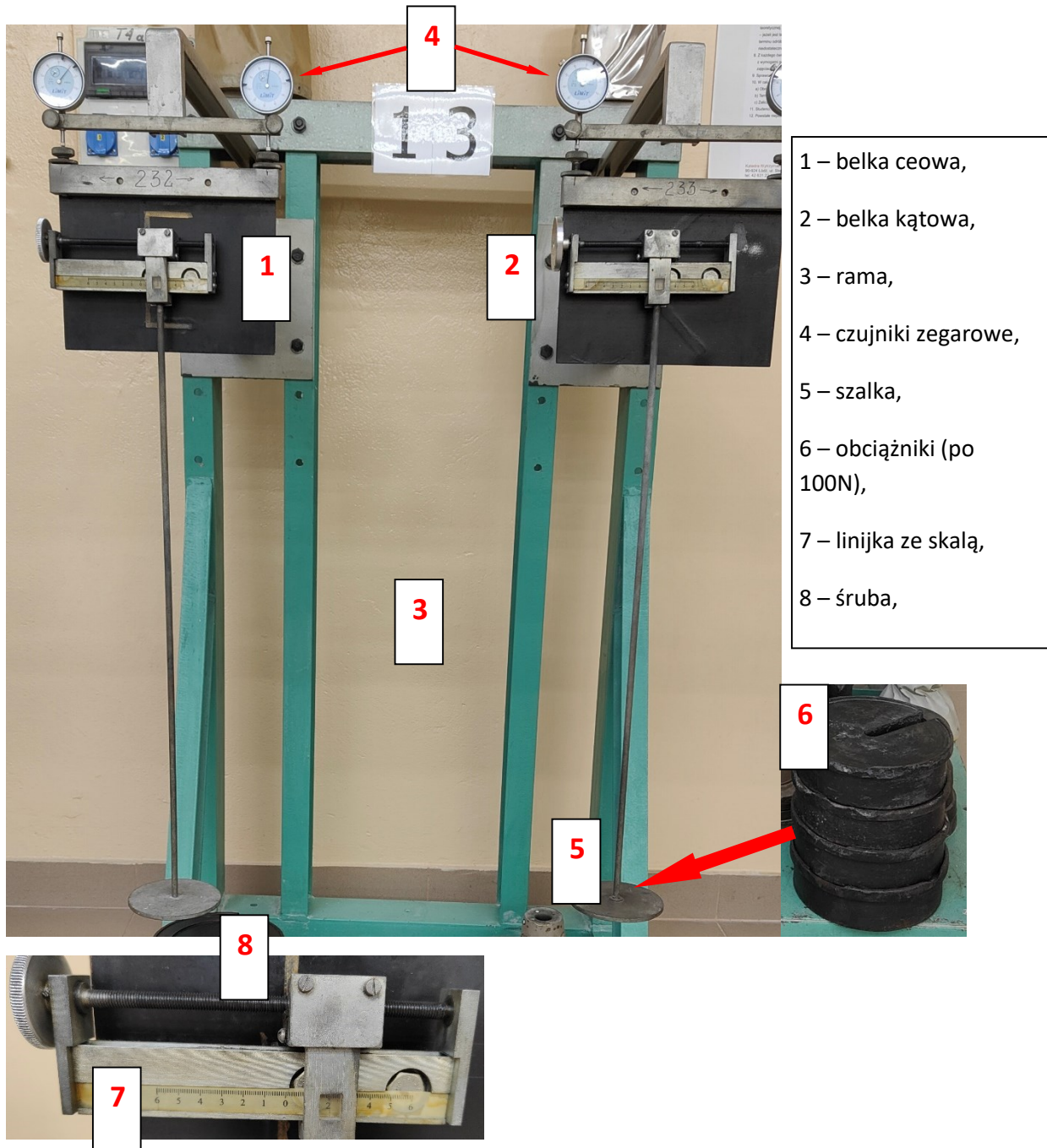
### Belka o przekroju kątowym



Rys. 3. Belka o przekroju kątowym

Dla belki o przekroju kątowym rozkład sił stycznych pokazano na rys. 3. Środek sił poprzecznych leży w tym przypadku w środku odcinka  $DE$ , zatem  $e_k = 0$ .

### 3.4 Stanowisko badawcze



Rys.5. Stanowisko badawcze

Stanowisko badawcze pokazano na rys.5. Stanowisko to składa się z dwóch belek wspornikowych (1 i 2) zamocowanych na ramie (3). Belki obciążane są za pomocą szalek ((5) obciążanych obciążnikami (6). Linie działania siły  $P$  zmienia się za pomocą śruby (8). Położenie tej linii wskazuje linijka (7). Kąt

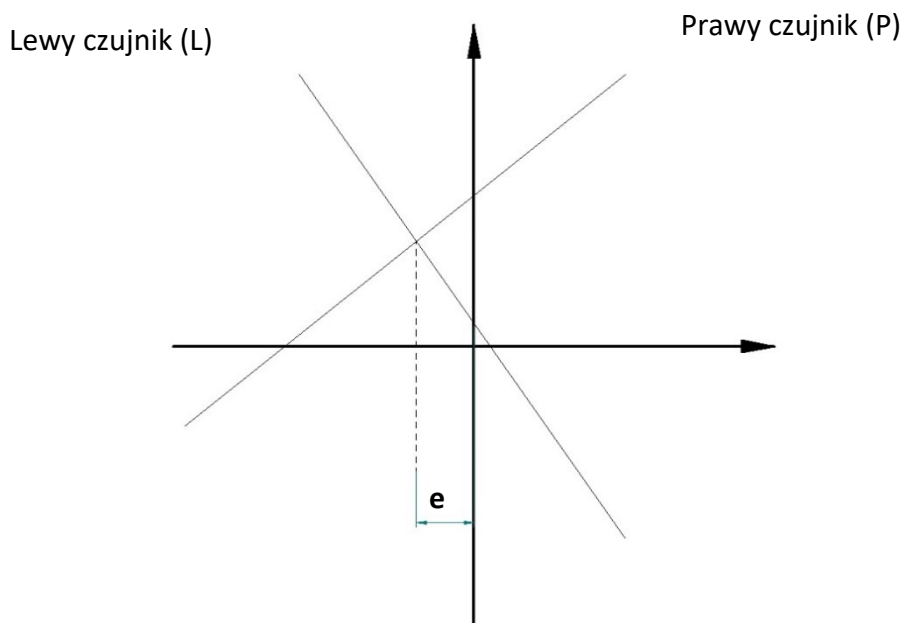
skręcenia belek jest mierzony pośrednio za pomocą par czujników zegarowych (4), wskazujących ugięcie. Czujniki mają dwie skale: małą – o działce elementarnej 1mm i dużą – o działce elementarnej 0.01 mm.

### 13.5 Wykonanie ćwiczenia

Procedura wykonania ćwiczenia jest taka sama dla obu belek:

1. Ustawić śrubę (8) na zero skali na linijce (7) bez obciążenia. Ustawić wskazania obu czujników (4), tak aby wskazywały tę samą wartość (np. 15 mm),
2. Ustawić śrubę (8) na wartości - 40 mm na skali na linijce (7)
3. Obciążyć szalkę obciążnikami (300 N dla belki ceowej, 200 N dla belki kątovej),
4. Przesuwać linię działania siły P (tj obciążniki z szalką) w przedziale od - 40mm do + 40 co 10 mm, za pomocą śruby (8); położenie linii działania siły wskazuje skala na linijce (7),
5. Dla każdego położenia linii działania siły odczytać wskazania lewego i prawego czujnika (4) i za pisać je w tabeli. Wzór tabeli znajduje się w we wzorcu sprawozdania,
6. Zdjąć obciążniki z szalki,
7. Ustawić śrubę (8) na zero skali na linijce (7)
8. Wykonać (na papierze milimetrowym) wykres wskazań obu czujników. Przykładowy wykres pokazano poniżej,
9. Znaleźć położenie środka sił poprzecznych w punkcie przecięcia wykresów lewego i prawego czujnika. Dla  $L=P$  kąt skręcenia wynosi zero, tzn. nie występuje efekt skręcania,
10. Obliczyć wartość teoretyczną  $e_c$  dla belki ceowej i porównać z wynikiem pomiarów. Dla belki o przekroju kątowym wykonać analogiczny wykres i wyznaczyć położenie środka sił poprzecznych  $e$ .

#### Wskazanie czujników [mm]



## Ćwiczenie 14

### BADANIE ZBIORNIKA CIŚNIENIOWEGO

#### 14.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z działaniem automatycznego mostka tensometrycznego; doświadczalne wyznaczenie rozkładu naprężeń w ścianach zbiornika ciśnieniowego przez pomiar odkształceń metodą tensometrii elektrooporowej oraz porównanie uzyskanych wyników z wynikami obliczeń wytrzymałościowych zbiornika za pomocą metody elementów skończonych.

#### 14.2. Wprowadzenie

Istotnym działem badań materiałów i konstrukcji są badania nieniszczące. Podstawową zaletą nadeń nieniszczących (ang. NDT - *non-destructive testing*) jest możliwość oceny stanu konstrukcji na każdym etapie eksploatacji, bez wpływu na jej wytrzymałość i możliwości funkcjonowania. W trakcie badań badany element nie ulega zniszczeniu. Obok badań rentgenograficznych, ultradźwiękowych, magneto-proszkowych, bardzo efektywna jest metoda pomiaru odkształceń za pomocą tensometrów elektrooporowych. Dotyczy to zwłaszcza badania kompletnych konstrukcji o dużym stopniu skomplikowania, a tym trudnych dla przeprowadzenia precyzyjnych obliczeń konstrukcyjnych (np. konstrukcje lotnicze, mosty, zbiorniki magazynowe). Wówczas badania za pomocą pomiarów tensometrycznych prowadzące do weryfikacji stanu naprężenia są szeroko stosowane. Obecne technologie bazują na tensometrach foliowych, technikach trzech przewodów i zautomatyzowanych mostkach tensometrycznych, wspartych systemami komputerowymi do obróbki danych.

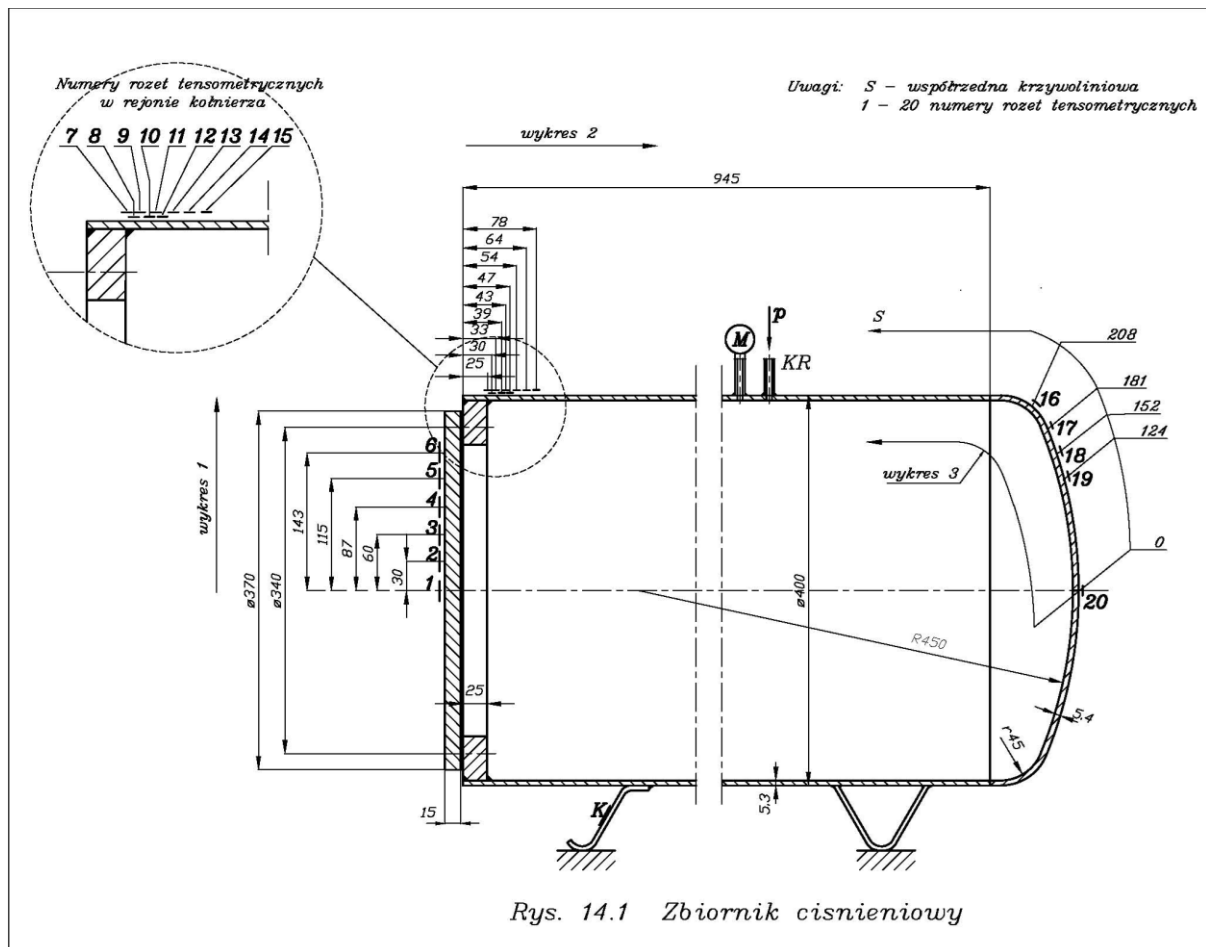
Inną formą oceny stanu naprężenia w konstrukcji jest przeprowadzenie obliczeń wytrzymałościowych na numerycznym modelu takiej konstrukcji przygotowanym według zasad metody elementów skończonych (MES). Jest to obecnie bardzo rozpowszechniona metoda, bardzo efektywna i dająca bardzo wiarygodne wyniki.

#### 14.3. Pomiary tensometryczne

Badany zbiornik walcowy jest zamknięty z jednej strony dnem elipsoidalnym, a z drugiej dnem płaskim kołowym. Dno płaskie za pomocą śrub jest zamocowane do pierścieniowego kołnierza spawanego od wewnątrz do cylindrycznej części zbiornika. Wymiary zbiornika oraz schemat rozmieszczenia tensometrów pokazano na Rys. 14.1. Zbiornik wypełniony jest wodą. Wzrost ciśnienia w zbiorniku uzyskuje się za pomocą pompki ręcznej przyłączonej podatnym węzłem do króćca KR. Do drugiego króćca M dołączony jest manometr cyfrowy służący do odczytu wartości tego ciśnienia.

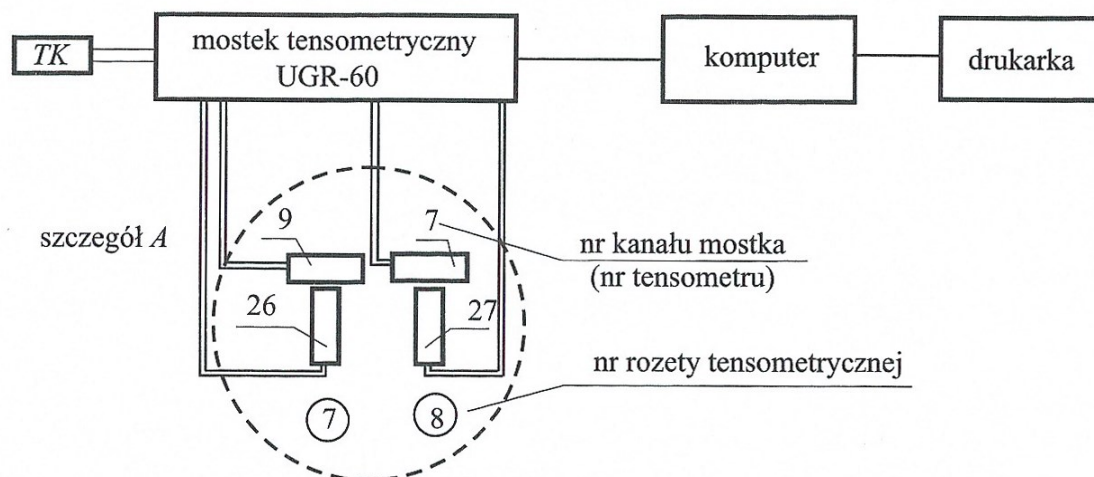
W ścianach zbiornika panuje dwukierunkowy stan naprężenia, a wobec tego, że badany zbiornik jest konstrukcją osiowosymetryczną kierunki naprężeń głównych oraz odkształceń głównych pokrywają się z kierunkami: promieniowym i obwodowym w dnach (w dnie wypukłym z kierunkiem południkowym i równoleżnikowym) oraz z kierunkiem wzdłużnym i obwodowym w części cylindrycznej. Taki stan odkształceń pozwala na ich pomiar w kierunkach głównych za pomocą rozet tensometrycznych z dwoma prostopadle do siebie zorientowanymi tensometrami (rozeta typu T lub L) [2]. Na zewnętrznej ścianie zbiornika nalepione są tensometry elektrooporowe typu RL3/120, RL5/120

oraz RL10/120 (baza pomiarowa 3, 5 i 10 mm odpowiednio, rezystancja 120 Ohm). Każdy z tensometrów pomiarowych jest podłączony do jednego kanału pomiarowego w automatycznym



Rysunek 14.1. Wymiary zbiornika oraz schemat rozmieszczenia tensometrów.

mostku UGR-60 firmy HBM. Dla potrzeb dalszej analizy każdy tensometr ma swój własny numer identyfikacyjny, a w parze z drugim tensometrem (system T) tworzy rozetę, która także ma własny numer identyfikacyjny. Sposób połączenia tensometrów, schemat ich lokalizacji oraz identyfikację rozet pokazuje rysunek 14.2.



Rysunek 14.2. Schemat połączenia tensometrów oraz przykład numeracji rozet.



Rysunek 14.3. Widok stanowiska do badania zbiornika ciśnieniowego.

#### 14.4. Obliczanie naprężeń

Po wykonaniu pomiaru odkształceń w kierunkach głównych na ścianach zbiornika obciążonego ciśnieniem wewnętrznym ( $p = 1$  MPa), należy określić wartości odpowiadających temu obciążeniu naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Obliczenia naprężeń dokonuje się w oparciu o uogólnione prawo Hooke'a dla płaskiego stanu naprężenia [1]:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \quad (14.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \quad (14.2)$$

W powyższych wzorach zastosowano następujące oznaczenia:  $E$  - moduł Younga,  $\nu$  - liczba Poissona,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oraz  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  - oznaczają - odpowiednio, naprężenia i odkształcenia obwodowe (indeks 1) i wzdłużne/promieniowe (indeks 2).

Dla znanych naprężeń głównych naprężenia zredukowane na podstawie hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego dla płaskiego stanu naprężenia można obliczyć z następującej formuły:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (14.3)$$

Szczegółowa instrukcja na stanowisku pomiarowym ćwiczenia 14 omawia czynności związane z obsługą mostka tensometrycznego, przeprowadzeniem pomiaru odkształceń oraz przeprowadzeniem obliczeń naprężeń w arkuszu Excel. Po zrealizowaniu czynności opisanych w tej instrukcji otrzymuje się wydruk wyników w formacie pokazanym na rysunku 14.4.

**Wyniki pomiarów tensometrycznych**

Politechnika Łódzka  
 Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji  
 Obiekt badany: ZBIORNIK  
 Data pomiaru: 08-02-2000  
 Godzina: 10:44:40

NAPRĘŻENIA GŁÓWNE i ZREDUKOWANE					Uwaga
Nr rozety	S1 MPa	S2 MPa	Śred MPa	alfa stopni	
1	119	120	119	0.0	S1 — naprężenia wzdłużne S2 — naprężenia obwodowe Śred — naprężenia zredukowane wg hipotezy Hubera
2	106	110	108	0.0	
3	93	98	96	0.0	
4	70	88	81	0.0	
5	41	72	62	0.0	
6	-1	46	47	0.0	
7	-55	-43	50	0.0	
8	42	31	38	0.0	
9	30	44	39	0.0	
10	18	36	31	0.0	
11	15	33	28	0.0	
12	19	34	29	0.0	
13	31	33	32	0.0	
14	23	-1	24	0.0	
15	-20	-50	43	0.0	
16	-20	-44	38	0.0	
17	39	4	38	0.0	
18	63	31	54	0.0	
19	64	43	57	0.0	
20	44	44	44	0.0	

Rysunek 14.4. Wydruk wyników pomiarów.

**14.5. Obliczenia naprężeń w wybranych miejscach ściany zbiornika**

Dla płyty kołowo-symetrycznej obciążonej równomiernie na całej powierzchni ciśnieniem, a taki przypadek obliczeniowy odnosi się do dna płaskiego zbiornika, istnieją rozwiązania analityczne pozwalające na bezpośrednie obliczenia naprężeń gnących - obwodowych i promieniowych. Naprężenia te przyjmują maksymalne wartości w środku geometrycznym płyty na jej zewnętrznych powierzchniach, jednakowe dla obydwu kierunków naprężeń. Dla ustalonych właściwości materiału (w przypadku realizowanego ćwiczenia jest to stal) oraz przyjętego sposobu podparcia krawędzi płyty naprężenia te - dla obydwu kierunków głównych, można wyrazić w funkcji wymiarów płyty następującymi wzorami:

1. brzeg płyty przegubowo podparty:

$$\sigma_{\max} = 1,24p \left( \frac{a}{h} \right)^2, \quad (14.4)$$

2. brzeg płyty utwierdzony:

$$\sigma_{\max} = 0,75p \left( \frac{a}{h} \right)^2, \quad (14.5)$$

We wzorach (14.4) i (14.5) przez  $p$  [MPa] oznaczono wartość ciśnienia obciążającego powierzchnię dna,  $a$  jest jego promieniem, natomiast  $h$  oznacza grubość dna zbiornika. Według rysunku 14.1 jest to odpowiednio  $a = 170$  mm i  $h = 15$  mm. Współczynniki liczbowe wynikają z przyjęcia stałych materiałowych dla stali.

W badanym zbiorniku dno płaskie zamocowane jest na pierścieniu spawanym do wnętrza płaszczki zbiornika. Stąd konstrukcyjne podparcie dna płaskiego ma charakter podparcia sprężystego.



Należy oczekiwać, że wyznaczone w trakcie badania zbiornika naprężenia w środku jego dna płaskiego będą miały wartość pośrednią wobec wartości naprężeń wyliczonych ze wzorów (14.4) i (14.5). W odpowiednim wierszu sprawozdania należy to wykazać przez porównanie obliczonych i wyznaczonych w pomiarze wartości naprężeń.

W płaszczu zbiornika - jego części walcowej, w miejscu dostatecznie oddalonym od jego końców (den) można przyjąć, że panuje tzw. błonowy stan naprężenia. Dla takiego przypadku w zbiorniku walcowym naprężenia obwodowe i wzdłużne są obliczane z zależności:

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2g}, \quad (14.6)$$

$$\sigma_2 = \frac{pD}{4g}, \quad (14.7)$$

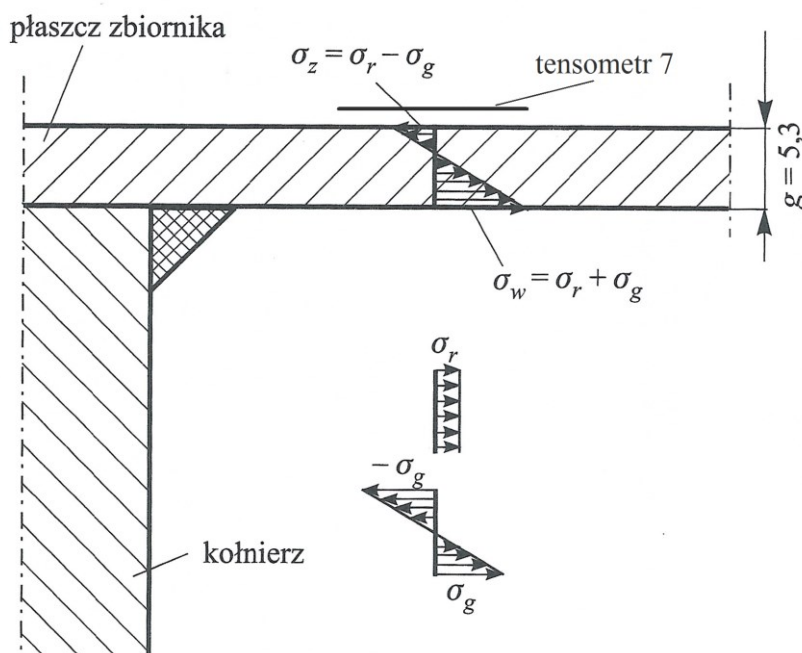
We wzorach tych zastosowano oznaczenia z rysunku 14.1.

Dno elipsoidalne składa się z centralnej części kulistej o promieniu  $R$  oraz części toroidalnej o promieniu  $R_1$ . Traktując środkową część dennicy jako powłokę kulistą można naprężenia panujące w jej środku obliczyć ze wzoru:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pR}{2g} = \frac{pD}{4g}, \quad (14.8)$$

W zapisie wzoru (14.8) uwzględniono symetrię powłoki kulistej ( $R = 450$  mm i  $g = 5,3$  mm).

Rozwiązanie konstrukcyjne zamocowania dna płaskiego zbiornika powoduje, że brzeg cylindrycznej ściany zbiornika jest zginany. Parcie wody na dno płaskie powoduje jego deformację, które poprzez pierścieniowy kołnierz mocujący dno kołowe przenoszą się na fragment brzegowy ściany zbiornika. Zginanie ściany zbiornika sprawia, że naprężenia wzdłużne po stronie zewnętrznej i wewnętrznej mają różne wartości w efekcie nałożenia się efektu zginania ( $\sigma_g$ ) i rozciągania ( $\sigma_r$ ). Rozkład naprężeń pokazano na rysunku 14.5.



Rysunek 14.5. Rozkład naprężeń z obszarze zginania ścianki zbiornika ciśnieniowego

Można określić wartość naprężeń normalnych po wewnętrznej stronie ściany zbiornika z następującej zależności, którą wyjaśnia rysunek 14.5:

$$\sigma_w = 2\sigma_r - \sigma_z, \quad (14.9)$$

gdzie  $\sigma_r$  oznacza naprężenie wzdłużne w stanie błonowym. Za  $\sigma_r$  można podstawić wartość obliczoną ze wzoru (14.7) lub wartość wyznaczoną z pomiaru na płaszczy zbiornika w jego środkowej części, w której występuje tylko stan błonowy naprężenia. Z kolei  $\sigma_z$  jest wartością naprężenia wyznaczoną z pomiaru tensometrem nr 7, który znajduje się w obszarze zginania.

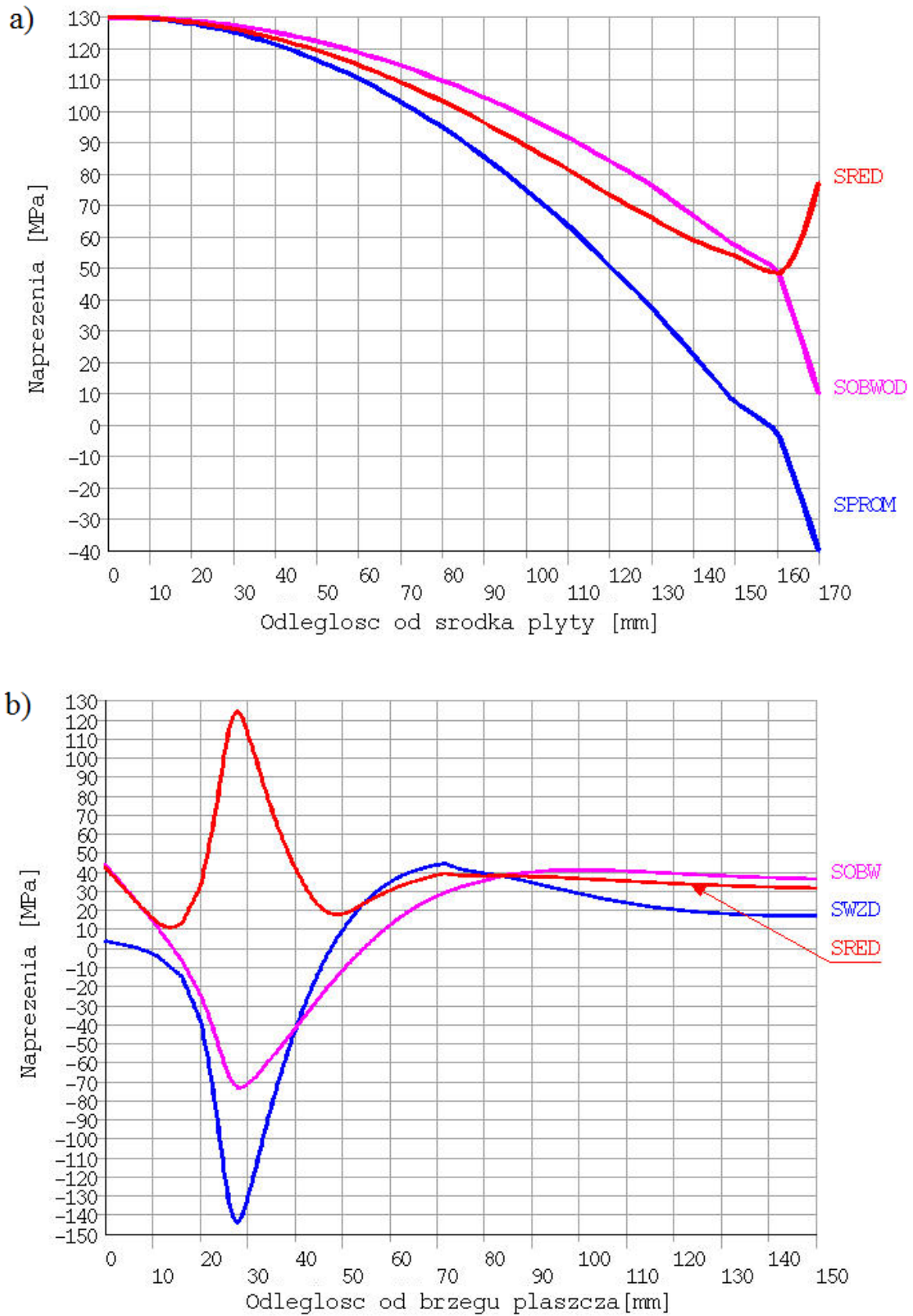
## 14.6. Metoda elementów skończonych

Idea metody elementów skończonych (MES) polega na podziale dużego obszaru (np. modelu konstrukcji) na skończoną liczbę podobszarów o małych rozmiarach zwanych elementami skończonymi. Z siatki tak utworzonych elementów można wyróżnić węzły leżące w narożach siatki lub na krawędziach elementów. Węzły są jedynymi punktami, w których elementy skończone łączą się ze sobą. Wprowadza się pewne funkcje (tzw. kształtu), które zapewniają ciągłość konstrukcji i odkształceń. Oznacza to, że przed i po odkształceniu krawędzie sąsiadujących elementów skończonych przylegają do siebie. W zależności od typu elementu, każdy węzeł może mieć do sześciu stopni swobody. W przypadku analizy strukturalnej mogą to być trzy składowe przemieszczenia w kierunkach równoległych do osi układu współrzędnych, w którym opisano siatkę elementów oraz trzy składowe obroty wokół każdej z tych osi. Obciążenia przykładane są w węzłach. W każdym węźle muszą być spełnione warunki równowagi. Pod wpływem obciążenia następują przemieszczenia węzłów, które należy obliczyć. Znając przemieszczenia węzłów można obliczyć odkształcenia, a następnie w oparciu o związki konstytutywne (zależności naprężenie-odkształcenie) dla danego materiału można obliczyć wartości naprężeń. Postępowanie takie prowadzi do otrzymania układu równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych, który wymaga rozwiązania numerycznego (z wykorzystaniem metod komputerowych).

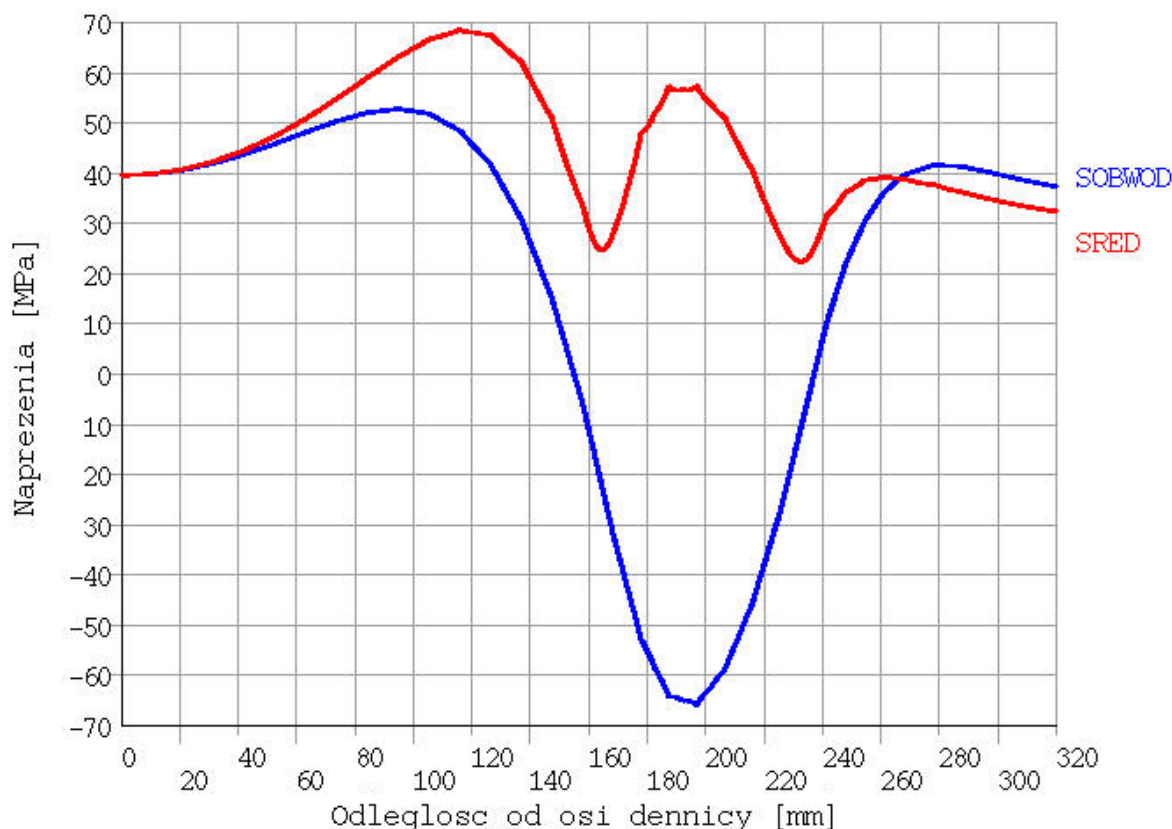
W zależności od geometrii konstrukcji stosuje się odpowiednie typy elementów skończonych, których definicja zawiera założenia właściwej teorii z mechaniki ciała stałego, stosowne uproszczenia lub przybliżenia, do których dostosowany jest także model MES analizowanej konstrukcji. Stosuje się np. elementy bryłowe w rozwiązaniach konstrukcji grubościennych, elementy powłokowe dla konstrukcji cienkościennych oraz elementy belkowe dla konstrukcji prętowych.

Dla zobrazowania sposobu prowadzenia obliczeń oraz analizy otrzymanych wyników przy zastosowaniu metody elementów skończonych przygotowano model badanego zbiornika ciśnieniowego. Zastosowano przy tym elementy bryłowe o kształcie sześciątów oraz czworościanów. Ze względu na symetrię model stanowi 1/4 rzeczywistego zbiornika.

Powszechnie stosowaną metodą weryfikacji poprawności modelu numerycznego przygotowanego w MES jest porównanie uzyskanych przy jego zastosowaniu wyników z wynikami eksperymentu lub badań rzeczywistej konstrukcji. Na rysunkach 14.6 i 14.7 przedstawiono wykresy przebiegu naprężeń w poszczególnych fragmentach ścian zbiornika obliczone metodą elementów skończonych. Są to naprężenia obwodowe (SOBW), wzdłużne (SWZD) oraz naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego (SRED) wyznaczone w dnie płaskim, części walcowej oraz w dnie elipsoidalnym zbiornika poddanego działaniu ciśnienia wewnętrznego  $p = 1$  MPa. W ramach realizacji ćwiczenia należy na wykresach tych nanieść odpowiednie wartości naprężeń obliczone na podstawie badania zbiornika ciśnieniowego metodą tensometrii elektrooporowej.



Rysunek 14.6. Rozkład naprężeń w ściankach zbiornika ciśnieniowego obliczonych MES: naprężenia w dnie płaskim (a), w płaszczu przy kołnierzu (b).



Rysunek 14.7. Rozkład naprężeń w ściankach zbiornika ciśnieniowego obliczonych MES: naprężenia w dennicy elipsoidalnej.

## 5. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) cel ćwiczenia,
- 2) tabelę z wynikami pomiarów,
- 3) porównanie naprężeń obwodowych i wzdłużnych w płaszczu zbiornika w stanie błonowym, otrzymanych z wzorów teoretycznych (wzory (14.6) i (14.7)) oraz doświadczalnie dla rozety nr 15,
- 4) porównanie wartości naprężeń maksymalnych otrzymanych doświadczalnie dla płyty kołowo symetrycznej (dno płaskie) z wartościami otrzymanymi teoretycznie dla takiej samej płyty obciążonej na całej powierzchni równomiernie rozłożonym ciśnieniem, w przypadku:
  - przegubowego (swobodnego) podparcia brzegu (wzór (14.4)),
  - brzegu utwierdzonego (wzór (14.5)),
 przyjąć w obliczeniach  $a = 170 \text{ mm}$  i  $h = 15 \text{ mm}$ .

- 5) oszacowanie wartości naprężeń w płaszczu zbiornika przy kołnierzu po stronie wewnętrznej według wzoru (14.9),
- 6) porównanie naprężeń błonowych w części elipsoidalnej dennicy zbiornika otrzymanych ze wzorów teoretycznych (wzór (14.8)) i doświadczalnie dla rozety nr 20; w obliczeniach przyjąć dane  $R = 450 \text{ mm}$  ( $D = 900 \text{ mm}$ ) i  $g = 5,3 \text{ mm}$ ,
- 8) wykresy rozkładów naprężeń uzyskanych z obliczeń MES, na których należy nanieść wartości naprężeń uzyskane na podstawie pomiarów tensometrycznych,
- 9) uwagi i podsumowanie.

## Literatura

- [1] M.E. Niezgodziński, T. Niezgodziński, Wytrzymałość Materiałów, PWN, 2009.
- [2] Z. Roliński, Tensometria Oporowa, WNT, 1981.
- [3] Dz.U. 259/2005, poz. 2171, Rozporządzenie Ministra Gospodarki w sprawie zasadniczych wymagań dla prostych zbiorników ciśnieniowych.

## Ćwiczenie 15

### ZGINANIE UKOŚNE

#### 15.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest:

- doświadczalne wyznaczenie strzałki ugięcia w belce wspornikowej poddanej zginaniu płaskiemu oraz ukośnemu,
- porównanie otrzymanych wyników z wartościami wyznaczonymi na podstawie wzorów teoretycznych,
- wyznaczenie doświadczalnych i teoretycznych maksymalnych naprężeń w belce wspornikowej poddanej zginaniu płaskiemu oraz ukośnemu w zadanym punkcie A (rys. 15.1).

#### 15.2. Wprowadzenie

Belką nazywamy element nośny konstrukcji, którego:

- jeden wymiar (długość belki) jest znacznie większy od wymiarów przekroju poprzecznego,
- obciążenie prostopadłe do podłużnej osi belki powoduje jej zginanie.

Przez środek ciężkości przekroju poprzecznego przechodzą osie centralne ( $y$ - $z$ ). Linie łączące środki ciężkości przekrojów nazywamy osią belki ( $x$ ).

Istnieją dwie osie centralne, prostopadłe do siebie, względem których momenty bezwładności figury pola przekroju belki, osiągają wartości ekstremalne. Osie te nazywamy głównymi ( $y_g$  –  $z_g$ ), zaś wartości tych momentów bezwładności głównymi centralnymi momentami bezwładności przekroju. Płaszczyzny wyznaczone osiami ( $y_g$ - $z_g$ ) oraz osią  $x$  nazywamy płaszczyznami głównymi.

Gdy przekrój poprzeczny ma oś symetrii, to taka oś jest jedną z głównych centralnych osi bezwładności.

**Zginanie płaskie** (rys. 15.1) zachodzi wtedy, gdy obciążenia wywołujące zginanie, a więc i momenty gnące, działają w płaszczyźnie zawierającej oś belki i jedną z głównych centralnych osi bezwładności przekroju.

Druga główna centralna oś bezwładności przekroju pokrywa się z osią obojętną przy zginaniu.

Linia ugięcia belki jest krzywą płaską i leży w płaszczyźnie obciążenia belki (w płaszczyźnie zginania).

**Zginanie ukośne** (rys. 15.2) występuje wówczas gdy płaszczyzna, w której działa obciążenie zginające belkę **nie** leży w żadnej z dwóch płaszczyzn wyznaczonych przez oś belki i główną centralną oś bezwładności przekroju.

Oś obojętna przy zginaniu ukośnym nie jest prostopadła do płaszczyzny zginania belki.

W tym przypadku ugięta oś belki nie leży w płaszczyźnie działania sił obciążających belkę.

#### 15.3. Określenia podstawowe

Na rys. 15.1 pokazano przykład zginania płaskiego belki wspornikowej o długości  $L$  i przekroju prostokątnym  $b \times h$  ( $b > h$ ).

Główne centralne momenty bezwładności przekroju wynoszą:

$$I_{zg} = I_{\min} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (15.1)$$

$$I_{yg} = I_{\max} = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (15.2)$$

Zginanie ukośne można uważać za rezultat zginania belki w dwóch płaszczyznach wzajemnie prostopadłych przechodzących przez główne centralne osie bezwładności przekroju ( $z_g$ ,  $y_g$ ) i podłużną oś belki (rys. 15.3).

Siłę  $P$  rozkładamy na dwie składowe wzdłuż głównych centralnych osi bezwładności przekroju:

$$\begin{aligned} P_{z_g} &= P \cdot \sin \alpha \\ P_{y_g} &= P \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (15.3)$$

Momenty gnące w przekroju odległym o  $x$  od początku układu osi:

$$\begin{aligned} M_{y_g} &= P_{z_g} \cdot x = P \cdot x \cdot \sin \alpha \\ M_{z_g} &= P_{y_g} \cdot x = P \cdot x \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (15.4)$$

gdzie:  $M_{y_g}$  – wektor momentu gnącego względem osi  $y_g$ ,

$M_{z_g}$  – wektor momentu gnącego względem osi  $z_g$ .

Naprężenie normalne w dowolnym punkcie rozpatrywanego przekroju jest sumą algebraiczną naprężeń powstałych od momentów gnących działających w płaszczyznach głównych belki:

$$\sigma = \frac{M_{z_g} \cdot y}{I_{z_g}} + \frac{M_{y_g} \cdot z}{I_{y_g}} = \frac{P \cdot x \cdot \cos \alpha \cdot y}{I_{z_g}} + \frac{P \cdot x \cdot \sin \alpha \cdot z}{I_{y_g}} \quad (15.5)$$

Np. dla  $x = L$  w punkcie A (rys. 15.1, 15.4) naprężenia wynoszą:

$$\sigma_A = \frac{P \cdot L \cdot \cos \alpha \cdot h/2}{I_{z_g}} + \frac{P \cdot L \cdot \sin \alpha \cdot b/2}{I_{y_g}} \quad (15.5 a)$$

Składowe ugięcia końca belki w płaszczyznach głównych obliczamy z wzorów:

$$f_{y_g} = \frac{P \cdot \cos \alpha \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_{z_g}} \quad (15.6)$$

$$f_{z_g} = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_{y_g}} \quad (15.7)$$

### **Uwaga:**

Na rys. 15.3 b pokazano schematycznie składowe przemieszczenia końca belki obróconej o kąt  $\alpha$ . Przeciwpromienna zakreślonego trójkąta przedstawia wypadkową strzałkę ugięcia końca belki.

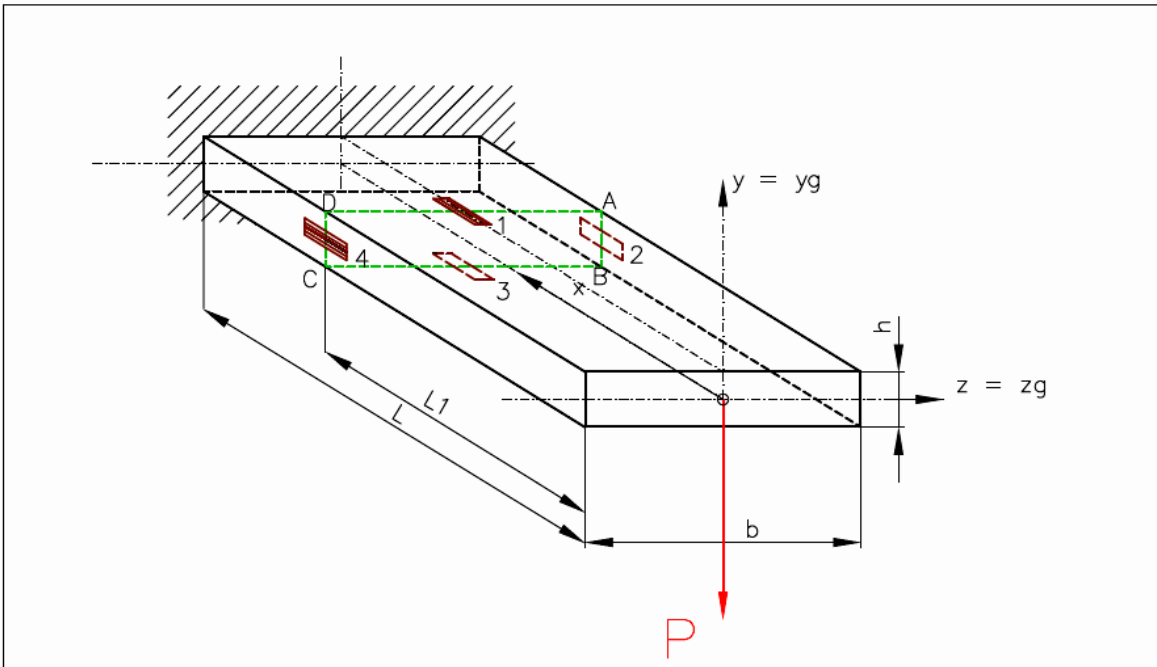
Z geometrycznych zależności wynika, że:

$$f_{wT} = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad (15.8)$$

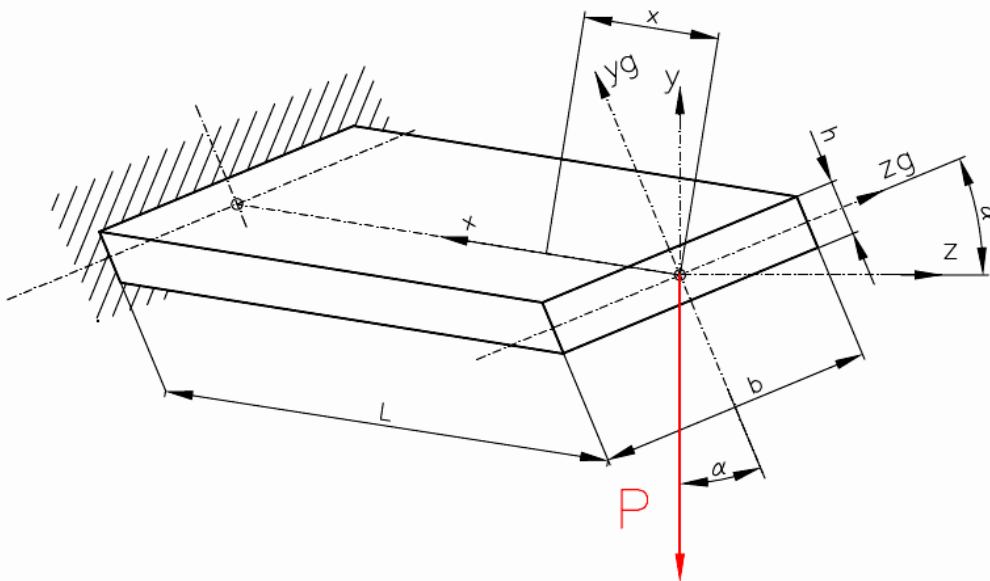
gdzie:  $f_y$ ,  $f_z$  - składowe strzałki ugięcia **obliczone/teoretyczne**

$$f_{wE} = \sqrt{f_{y_g}^2 + f_{z_g}^2} \quad (15.9)$$

gdzie:  $f_{y_g}$ ,  $f_{z_g}$  - składowe strzałki ugięcia **zmierzone/eksperymentalne**.

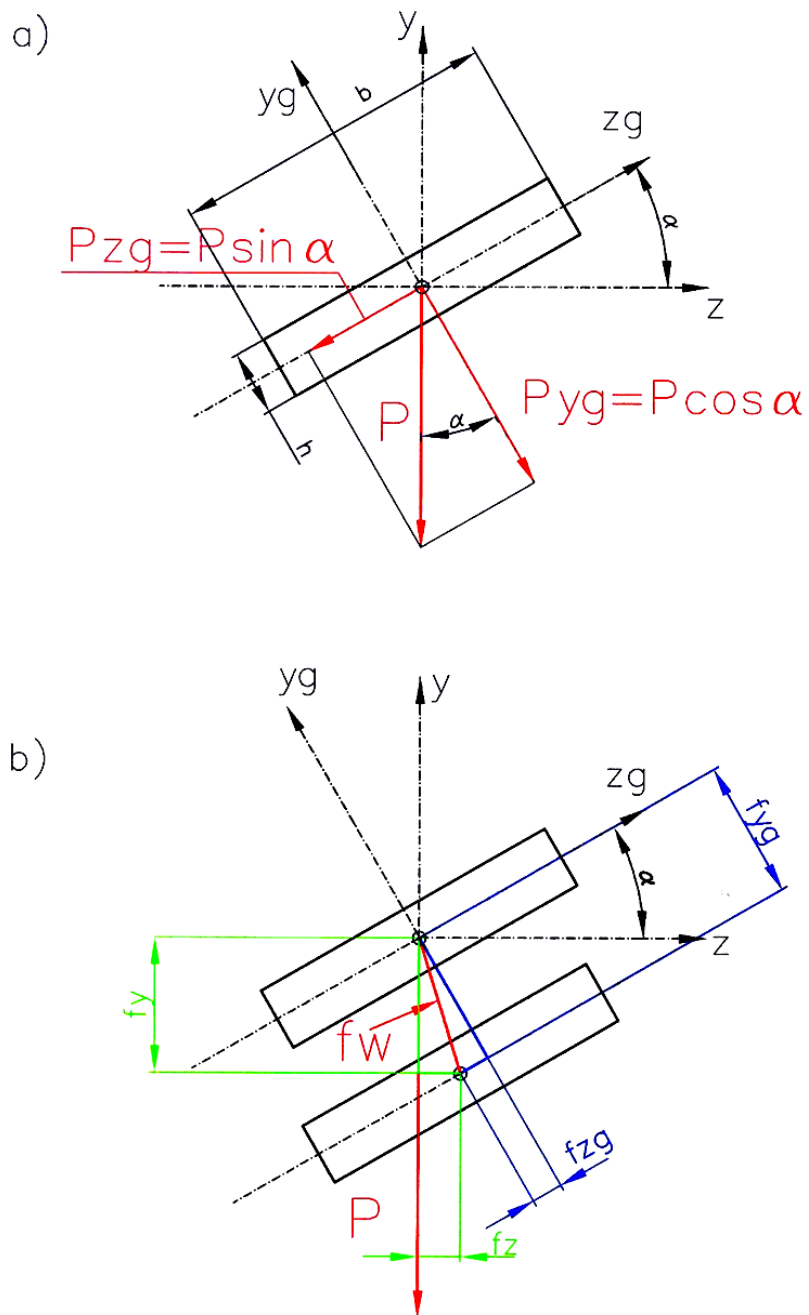


rys.15.1 Zginanie płaskie

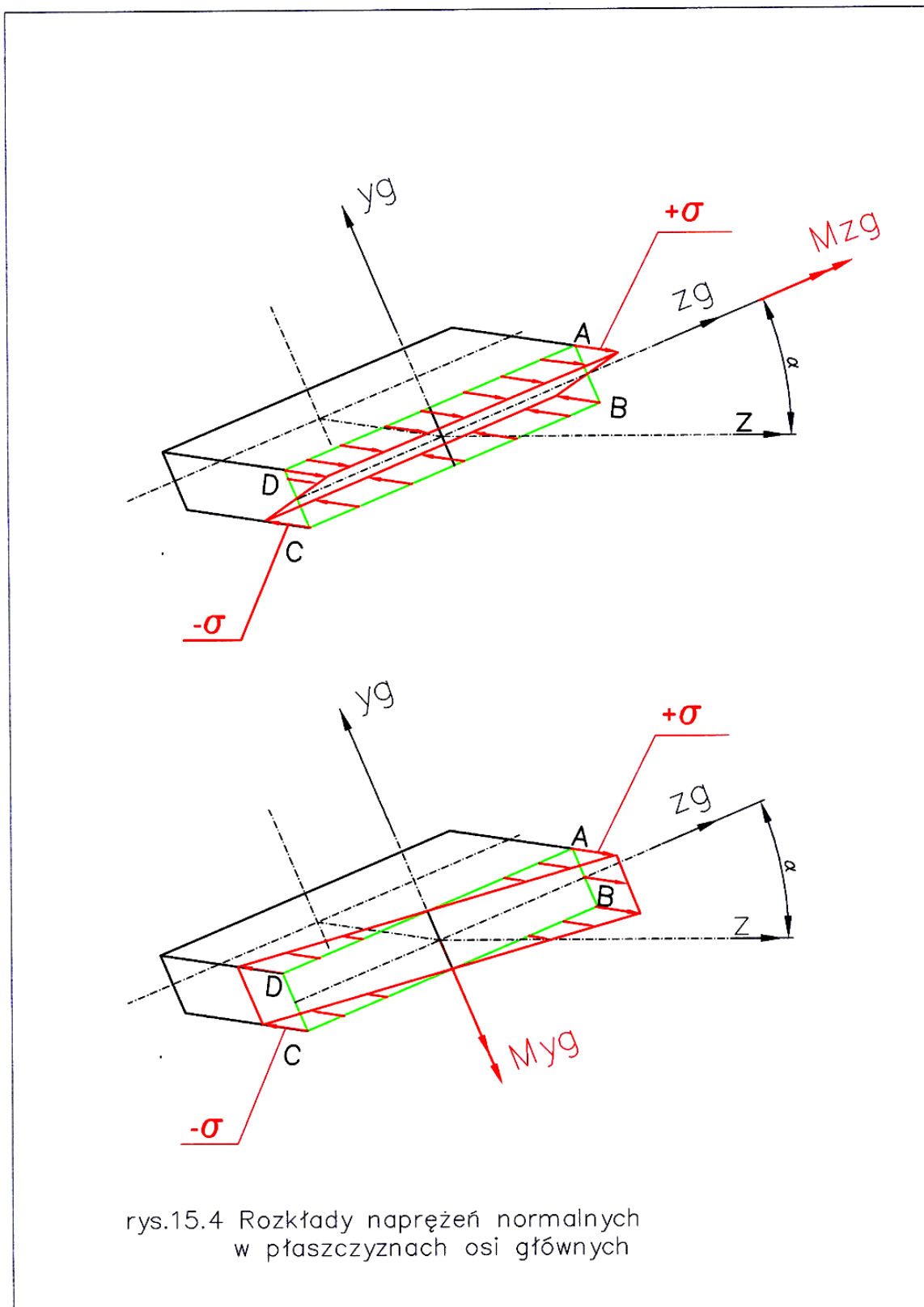


rys.15.2 Zginanie ukośne





rys.15.3 Składowe obciążenia i ugięcia belki



### 15.4. Opis stanowiska pomiarowego

Badana belka wspornikowa o przekroju prostokątnym, obciążona jest siłą  $P$  na swobodnym końcu. Konstrukcja zamocowania belki (tzw. podzielnica kątowna) umożliwia obracanie jej dookoła osi  $x$  (rys. 15.2, 15.5a) o kąt  $\alpha$ .

Gdy kąt  $\alpha = 0^\circ$  lub  $\alpha = 90^\circ$  zginanie jest płaskie, gdyż wówczas jedna z głównych centralnych osi bezwładności przekroju belki pokrywa się z płaszczyzną, w której działa obciążenie belki. W tym przypadku zgięta oś belki leży w płaszczyźnie działania siły obciążającej i osi  $x$ .

Jeżeli kąt  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , wówczas belka poddana jest zginaniu ukośnemu. Gdy występuje zginanie ukośne zgięta oś belki nie leży w płaszczyźnie działania sił (jest zwichrowana).

Na swobodnym końcu belki znajduje się łożysko wahliwe wraz z konstrukcją umożliwiającą obciążanie belki pionową siłą  $P$ . Ugięcia końca belki (przemieszczenia obudowy łożyska) mierzone są czujnikami potencjometrycznymi.

a)



b)



c)



d)



Rys. 15.5 Stanowisko do badań zginania płaskiego i ukośnego: a) widok ogólny stanowiska; b) pomierzone wartości; c) mocowanie belki w uchwycie; d) tensometry pomiarowe

## 15.5. Przeprowadzenie ćwiczenia

### 15.5.1. Obliczenia teoretyczne

Wykonać obliczenia teoretyczne wg wzorów 15.1 -15.8 i zamieścić w tabelach.

### 15.5.2. Pomiary naprężeń i ugięć belki

**Wykonać kolejno następujące czynności:**

- Włączyć układ pomiarowy (włącznikiem na listwie zasilającej) oraz komputer,
- Kliknąć 2x ikonę (uruchomić program) Esman USB,
- Kliknąć „Dane pomiarowe” następnie „Pomiar”,
- Zaakceptować nazwę zadania „Zginanie ukośne” OK,
- Kliknąć „Rozpocznij pomiary”

**Pomiary:**

1. Za pomocą pokrętki podziałnicy ustawić kąt położenia belki  $\alpha=0^\circ$ ,
2. Z ekranu monitora odczytać wskazania mostka dla tensometrów nr. 1, 2, 3, 4 i zapisać w tablicy 15.1 pomiarów w wierszu „Wskazanie mostka przed obciążeniem dla tensometrów nr. 1-4”,
3. Z ekranu monitora odczytać wskazania mostka czujników przemieszczeń (odległości między ramką a obudową łożyska:  $f_y$  w pionie i  $f_z$  w poziomie i zapisać w tablicy 15.2 pomiarów w wierszu „Wskazanie czujnika w kierunku:  $f_y$ ,  $f_z$  przed obciążeniem,
4. Obciążyć belkę siłą 50 N,
5. Z ekranu monitora odczytać wskazania tensometrów nr. 1, 2, 3, 4, oraz zapisać w tablicy 15.1 pomiarów w odpowiednich wierszach jw. po obciążeniu.
6. Odczytać wskazania czujników przemieszczeń oraz zapisać w tablicy 15.2 pomiarów w odpowiednich wierszach jw. po obciążeniu,
7. Odciążyć belkę,
8. Punkty 2÷7 powtórzyć dla kątów  $\alpha = 30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ .
  - Kliknąć „Zakończyć pomiar”,
  - Kliknąć „czy zatrzymać pomiar” TAK,
  - Kliknąć „Koniec”,
  - Zamknąć system,
  - Wyłączyć układ z sieci wyłącznikiem na listwie zasilającej,

### 15.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) cel ćwiczenia,
- 2) zestawienie wyników obliczeń i pomiarów naprężeń i ugięć w tabelach,
- 3) zestawienie maksymalnych naprężeń teoretycznych i eksperymentalnych dla  $x=L/1$  i punktu A,
- 4) wyznaczenie względnych dokładności naprężeń i ugięć,
- 5) podsumowanie.

### Literatura

- [1] M.E. Niezgodziński, T. Niezgodziński, Wytrzymałość Materiałów, PWN, 2009.  
[2] Z. Dyląg, A. Jakubowicz, Z. Orłoś.: Wytrzymałość Materiałów. WNT, 1999.

(należy dołączyć do sprawozdania)

Tablica 15.1. Naprężenia w przekroju belki (rys. 15.4)

Teoretyczne naprężenia																
Kąt obrotu belki $\alpha$ [°]	0°				30°				45°				90°			
Nr tensometru (rys. 15.1)	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Naprężenia $\sigma_i$ [MPa] dla $i=1,..4$ (wzór 15.5)																
Naprężenia w p. A $\sigma_{AmaxT}$ [MPa] (wzór 15.5a)																
Zmierzone naprężenia																
Wskazanie mostka przed obciążeniem $\sigma_{ia}$ [MPa]																
Wskazanie mostka po obciążeniu $\sigma_{ib}$ [MPa]																
Naprężenie $\sigma_i = \sigma_{ib} - \sigma_{ia}$ [MPa]																
Naprężenie w p. A $\sigma_{AmaxE} = \sigma_1 - \sigma_2$ [MPa]																

Tablica 15.2. Ugięcia belki

Teoretyczne ugięcia								
Kąt obrotu belki $\alpha$ [°]	0°		30°		45°		90°	
Ugięcie w pł. yg-x $f_{yg}$ [mm] (wzór 15.6)								
Ugięcie w pł. zg-x $f_{zg}$ [mm] (wzór 15.7)								
Ugięcie wypadkowe $f_{wT}$ [mm] (wzór 15.8)								
Zmierzone ugięcia								
Wskazanie czujnika przemieszczenia w kierunku:	$f_y$	$f_z$	$f_y$	$f_z$	$f_y$	$f_z$	$f_y$	$f_z$
przed obciążeniem $A_1$ [mm]								
po obciążeniu $A_2$ [mm]								
Składowe ucięcia $/A_2 - A_1/$ [mm]								
Ugięcie wypadkowe $f_{wE}$ [mm] (wzór 15.9)								

## Ćwiczenie 16

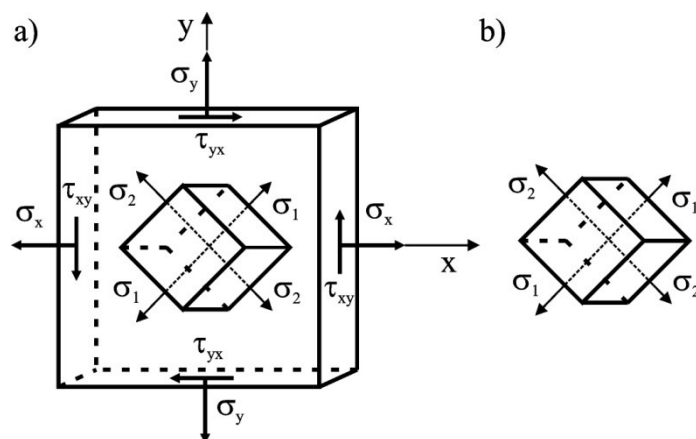
### WYZNACZANIE SKŁADOWYCH PŁASKIEGO STANU NAPRĘŻENIA W PŁYCCIE PRZY ZASTOSOWANIU TENSOMETRÓW ELEKTROOPOROWYCH

#### 16.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie składowych płaskiego stanu naprężenia w rozciąganej jednokierunkowo płycie prostokątnej, osłabionej w środku otworem kołowym, przez pomiar składowych stanu odkształcenia za pomocą tensometrów elektrooporowych oraz porównanie otrzymanych wyników z wartościami wyznaczonymi na podstawie wzorów teoretycznych.

#### 16.2. Wprowadzenie

Płaski stan naprężenia (rys. 16.1) występuje wówczas, gdy wszystkie jego składowe działają w jednej tylko płaszczyźnie. Wyznaczanie wartości tych składowych, występujących w określonym punkcie obciążonej konstrukcji, może być dokonane pośrednio przez pomiar odkształceń przy jednoczesnym wykorzystaniu odpowiednich związków między naprężeniami a odkształceniami. Przy założeniu, że przy danym obciążeniu wartości naprężeń nie przekraczają granicy proporcjonalności, dla materiału izotropowego związki te wynikają z uogólnionego prawa Hooke'a.



Rysunek 16.1. Płaski stan naprężenia: nieznanne (a) oraz znane (b) kierunki między naprężeniami głównymi.

Prawo Hooke'a dla dwukierunkowego (płaskiego) stanu naprężenia - wyrażone poprzez związki między naprężeniami i odkształceniami głównymi - ma postać:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),\end{aligned}\tag{16.1}$$

w których symbol  $\nu$  oznacza liczbę Poissona materiału badanej konstrukcji. Zatem, do wyznaczenia wartości naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oraz głównych odkształceń liniowych  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  konieczna jest znajomość stałych materiałowych  $E$  i  $\nu$ .

W przypadku ogólnym – gdy kierunki główne nie są znane – płaski stan naprężenia określony jest za pomocą trzech składowych, a mianowicie: dwóch składowych naprężenia normalnego  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  oraz trzeciej składowej – naprężenia stycznego  $\tau_{xy}$  (rys. 16.1a). Odpowiadającymi składowymi stanu odkształcenia są: liniowe odkształcenia względne  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$ , zachodzące w kierunkach osi  $Ox$  i  $Oy$  prostokątnego układu współrzędnych, oraz kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma_{xy}$ . Między wymienionymi składowymi stanu naprężenia, a składowymi stanu odkształcenia zachodzą związki:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (16.2)$$

Do wyznaczenia trzech składowych:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  stanu naprężenia w dowolnym punkcie obciążonej konstrukcji konieczna jest znajomość trzech składowych stanu odkształcenia, a mianowicie:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$  oraz stałych materiałowych  $E$  i  $\nu$ .

### 16.3. Podstawy teoretyczne wyznaczania składowych stanu naprężenia w rozciąganej jednokierunkowo płycie, osłabionej w środku otworem kołowym

Zgodnie z zasadą Saint-Venanta, w dowolnym przekroju poprzecznym I-I płyty (rys. 16.2), dostatecznie odległym od przekroju osłabionego otworem kołowym, występuje praktycznie równomierny, jednokierunkowy rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_0$ , których wartość określona jest wzorem:

$$\sigma_0 = \frac{P}{A_0} = \frac{P}{gb}\quad (16.3)$$

gdzie  $g=1.6$  mm jest stałą grubością płyty,  $b=400$  mm jej szerokością oraz  $r_0=20$  mm promieniem otworu.

W punktach leżących w pobliżu otworu jednokierunkowy stan naprężenia, jaki występuje w pełnym przekroju poprzecznym I-I, ulega zasadniczej zmianie. Staje się on mianowicie stanem płaskim, dwukierunkowym.

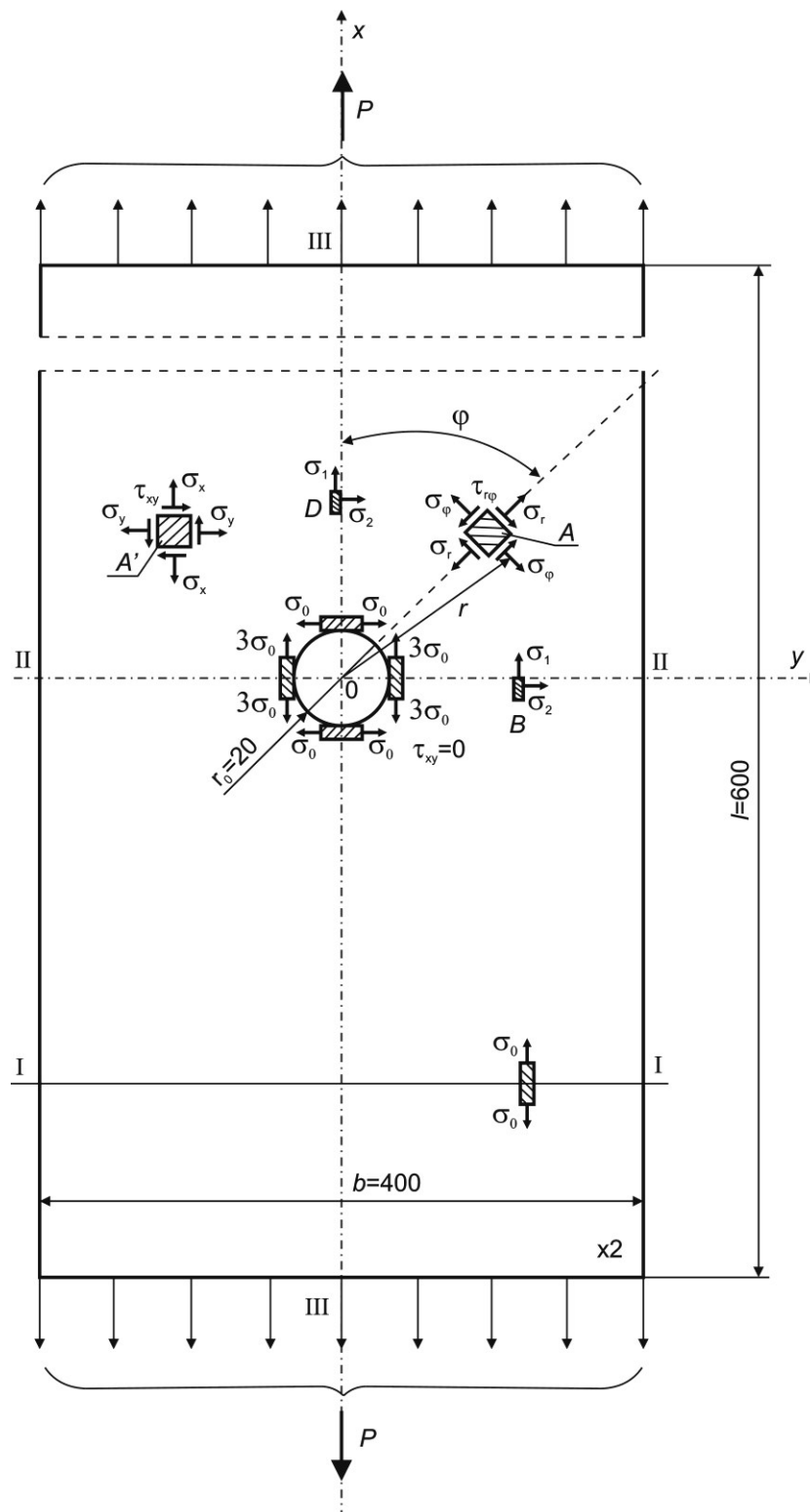
Dla cienkiej płyty z kołowym otworem w środku, poddanej jednokierunkowemu rozciąganiu, znane jest w teorii sprężystości dokładne rozwiązanie określające składowe stanu naprężenia w punktach leżących w pobliżu tego otworu. Dotyczy ono płyty prostokątnej o szerokości  $b$ , bardzo dużej w porównaniu ze średnicą otworu ( $b \gg 2r_0$ ).

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2} [(1-\rho^2) + (1-4\rho^2 + 3\rho^4)\cos 2\varphi], \\ \sigma_\varphi &= \frac{\sigma_0}{2} [(1+\rho^2) - (1+3\rho^3)\cos 2\varphi], \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{\sigma_0}{2} [(1+2\rho^2 - 3\rho^4)\sin 2\varphi],\end{aligned}\right\} \quad (16.4)$$

gdzie

$$\rho = \frac{r_0}{r}.\quad (16.5)$$





Rysunek 16.2. Płyta.

W tym przypadku składowe stanu naprężenia wyznaczone są w biegunowym układzie współrzędnych  $0r\varphi$  (rys. 16.2). Składowe te, czyli naprężenia normalne: promieniowe  $\sigma_r$  i obwodowe  $\sigma_\varphi$  oraz naprężenie styczne  $\tau_{r\varphi}$ , określone są za pomocą następujących wzorów (16.4).

Dla punktów leżących na brzegu otworu, dla których  $\rho=1$ , powyższe składowe stanu naprężenia określone są wzorami:

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{\rho=1} &= (\tau_{r\varphi})_{\rho=1} = 0, \\ (\sigma_\varphi)_{\rho=1} &= \sigma_0 [1 - 2 \cos 2\varphi].\end{aligned}\quad (16.6)$$

W punktach tych występuje tylko jedna składowa stanu naprężenia, a mianowicie obwodowe naprężenie normalne  $(\sigma_\varphi)_{\rho=1}$ , skierowane wzdłuż stycznej do brzegu otworu. Naprężenie to jest zatem naprężeniem głównym. Drugie naprężenie główne, skierowane wzdłuż normalnej do brzegu otworu jest w tym przypadku równe zero wobec braku obciążenia zewnętrznego na tym brzegu (tzn.  $(\sigma_r)_{\rho=1} = 0$ ).

Dla elementów leżących przy brzegu otworu na pionowej osi symetrii  $0x$ , dla których  $\varphi = n\pi$  (przy  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ), naprężenie

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=n\pi} = -\sigma_0,$$

natomiast dla elementów leżących przy brzegu otworu na poziomej osi symetrii  $0y$ , dla których  $\varphi = \pm n(\pi/2)$ , naprężenie obwodowe osiąga największą swą wartość:

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=n\pi/2} = 3\sigma_0.$$

Podstawiając do wzorów (16.5) wartość kąta  $\varphi = \pi/2$ , otrzymujemy odpowiednie wyrażenia określające składowe stanu naprężenia w dowolnym punkcie  $B$  przekroju poprzecznego, leżącym na poziomej osi symetrii płyty, to jest na osi  $0y$ . Na ściankach elementu wyciętego w otoczeniu tego punktu płaszczyznami równoległymi do kierunku  $0x$  oraz  $0y$  (rys. 16.2) występują zatem naprężenia określone następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}(\sigma_\varphi)_{\varphi=\pi/2} &= \sigma_x = \frac{\sigma_0}{2} (2 + \rho^2 + 3\rho^4) = \sigma_1, \\ (\sigma_r)_{\varphi=\pi/2} &= \frac{3}{2} \sigma_0 \rho^2 (1 - \rho^2) = \sigma_2, \\ (\tau_{r\varphi})_{\varphi=\pi/2} &= \tau_{xy} = 0,\end{aligned}\quad (16.7)$$

$$\text{dla } 1 \leq \rho \leq \frac{2r}{b}.$$

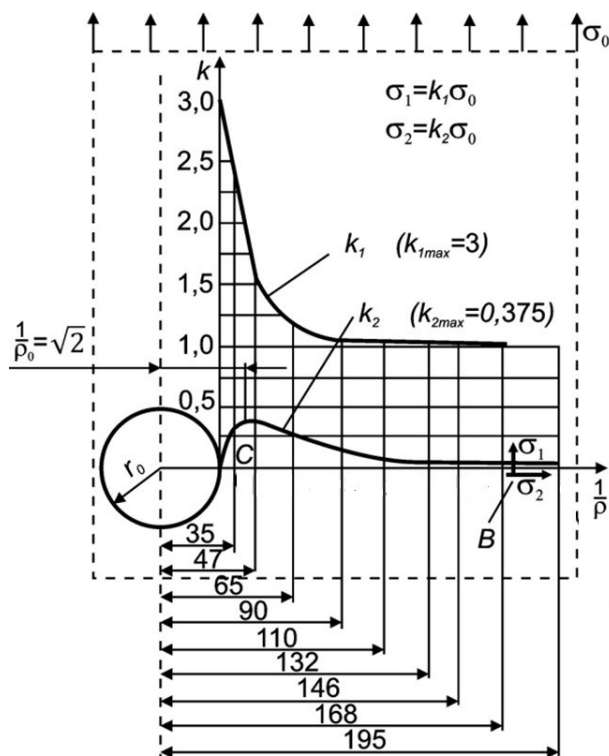
Ponieważ naprężenia styczne  $(\tau_{r\varphi})_{\varphi=n\pi/2} = 0$ , zatem dla wszystkich punktów płyty leżących na osi  $y$  kierunki  $0x$  i  $0y$  są kierunkami głównymi, a naprężenia  $(\sigma_r)_{\varphi=n\pi/2}$  i  $(\sigma_\varphi)_{\varphi=n\pi/2}$  – naprężeniami głównymi  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Z uwagi na postać wzorów (16.7) naprężenia te można przedstawić w postaci

$$\sigma_1 = k_1 \sigma_0, \quad \sigma_2 = k_2 \sigma_0 \quad (16.8)$$

gdzie  $k_1 = k_1(\rho)$  i  $k_2 = k_2(\rho)$  są bezwymiarowymi funkcjami współrzędnej  $\rho$ .

Teoretyczne rozkłady naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  wzdłuż poziomego przekroju  $0y$  płyty mogą być zatem przedstawione w postaci wykresów odpowiednich funkcji  $k_1$  i  $k_2$  wzdłuż tego przekroju. Przebiegi tych funkcji w układzie współrzędnych  $k=f(1/\rho)$  przedstawiono na rys. 16.3. Największa wartość naprężenia głównego  $\sigma_1$  w tym przekroju występuje dla największej możliwej wartości  $\rho$ , to jest dla  $\rho=1$ . Dla punktów na płycie leżących na osi  $y$  daleko od otworu (dla  $r \gg r_0$ ), występują naprężenia rozciągające działające tylko w jednym kierunku tj.  $\sigma_0$  (jak dla przekroju I-I). Maksymalna wartość drugiego naprężenia głównego  $\sigma_2$  występuje w punkcie  $C$  poziomego przekroju (rys. 16.3) czyli dla wartości  $\rho = \rho_0 = 1/\sqrt{2}$  o współrzędnej  $r \equiv y_c = r_0 \sqrt{2}$ . Maksymalna wartość naprężenia głównego  $\sigma_2$  w tym punkcie wynosi

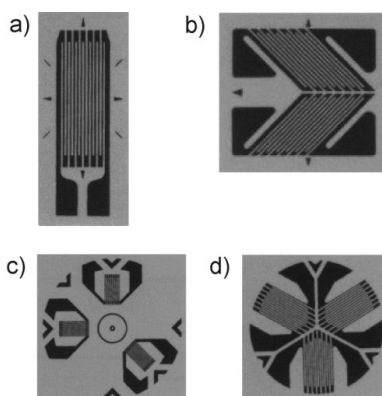
$$(\sigma_2)_{\rho=\rho_0=1/\sqrt{2}} = (\sigma_2) = \frac{3}{8} \sigma_0.$$



Rysunek 16.3. Teoretyczne rozkłady naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  wzdłuż przekroju  $0y$ .

#### 16.4. Pomiar składowych stanu odkształcenia

Do pomiaru odkształcenia  $\varepsilon$  w jednokierunkowym stanie naprężenia stosowane są elektrooporowe tensometry kratowe lub tensometry foliowe o symbolu TFs-10/120 produkowane w firmie TENMEX [1] (rys. 16.4).



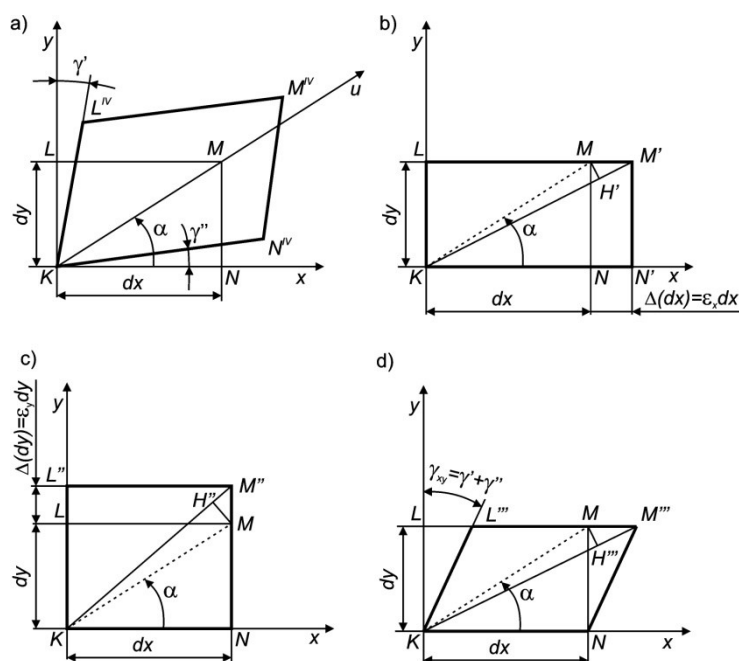
Rysunek 16.4. Tensometry elektrooporowe: a) TFs-10/120, b) TF-xs-5/120, c) TFrw-3/120, d) TFr-8/120.

Tensometry te nakleja się na powierzchni badanej konstrukcji tak, aby podłużne osie ich siatek pomiarowych pokrywały się z kierunkiem mierzonego odkształcenia  $\varepsilon$  (rys. 16.4a). Natomiast do pomiaru odkształceń  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , gdy znane są kierunki główne 1 i 2, konieczne jest stosowanie układów złożonych z dwóch tensometrów o osiach wzajemnie prostopadłych lub gotowej rozety tensometrycznej

typu TF-xs-5/120 (rys. 16.4b). Taki układ tensometrów określa się jako rozeta typu T. Podłużne osie siatek oporowych tych tensometrów muszą się pokrywać z kierunkami głównymi 1 i 2.

Jak już wspomniano, w ogólnym przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdy kierunki główne nie są znane, do wyznaczenia trzech składowych:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  stanu naprężenia konieczna jest znajomość trzech składowych stanu odkształcenia, tj.  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$ .

Z uwagi na to, że praktyczny pomiar odkształceń postaciowych określonych kątem  $\gamma_{xy}$  jest trudny do przeprowadzenia, kąt ten wyraża się na ogół w funkcji odkształceń liniowych zachodzących w trzech dowolnych, lecz nierównoległych kierunkach. Można go na przykład wyrazić za pomocą odkształceń  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  oraz dodatkowego odkształcenia  $\varepsilon_u$  zachodzącego w płaszczyźnie  $Oxy$  w dowolnym kierunku  $Ou$ , nie pokrywającym się z kierunkami osi  $Ox$  oraz  $Oy$ . Przyjmijmy, że kierunek ten pokrywa się z przekątną  $KM$  elementu  $KLMN$ , tworząc z osią  $Ox$  kąt  $\alpha$ . Element ten w stanie odkształconym przedstawiono na rys. 16.5a. Odkształcenie liniowe zachodzące wzdłuż przekątnej  $KM$  elementu  $KLMN$  jest funkcją wszystkich trzech składowych stanu odkształcenia, tj.  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  oraz  $\gamma_{xy}$ .



Rysunek 16.5. Odkształcenie liniowe zachodzące wzdłuż przekątnej  $KM$  elementu  $KLMN$  dla: a) wszystkich trzech składowych  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ , b) wpływ odkształcenia  $\varepsilon_x$ , c) wpływ odkształcenia  $\varepsilon_y$ , d) wpływ odkształcenia postaciowego  $\gamma_{xy}$ .

Zgodnie z zasadą superpozycji można je wyrazić w postaci następującej sumy:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_u' + \varepsilon_u'' + \varepsilon_u''' \quad (16.9)$$

w której  $\varepsilon_u'$ ,  $\varepsilon_u''$ ,  $\varepsilon_u'''$  są składowymi odkształcenia liniowego zachodzącego w kierunku wspomnianej przekątnej, pochodzącymi – kolejno – od odpowiednich składowych  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  oraz  $\gamma_{xy}$ . Składowa

$$\varepsilon_u' = \frac{KM' - KM}{KM} = \frac{H'M'}{KM} = \frac{\varepsilon_x dx \cos \alpha}{dx / \cos \alpha} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha$$

(rys. 16.5b) przedstawia wpływ odkształcenia  $\varepsilon_x$ . Składowa

$$\varepsilon_u'' = \frac{KM'' - KM}{KM} = \frac{H''M''}{KM} = \frac{\varepsilon_y dy \sin \alpha}{dy / \sin \alpha} = \varepsilon_y \sin^2 \alpha$$

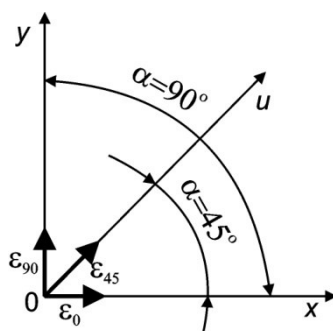
(rys. 16.5c) przedstawia wpływ odkształcenia  $\varepsilon_y$ . Składowa

$$\varepsilon_u''' = \frac{KM''' - KM}{KM} = \frac{H''' M'''}{KM} = \frac{\gamma_{xy} dy \cos \alpha}{dy / \sin \alpha} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

(rys. 16.5d) – wpływ odkształcenia postaciowego  $\gamma_{xy}$ .

Zgodnie ze wzorem (16.10), wartość względnego odkształcenia liniowego  $\varepsilon_u$  zachodzącego wzdłuż przekątnej  $KM$  elementu  $KLMN$ , to jest wzdłuż przyjętej osi  $0u$ , wynosi

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (16.10)$$



Rysunek 16.6. Odkształcenia liniowe zachodzące w kierunkach  $0x$ ,  $0y$ ,  $0u$ .

Z powyższej zależności można wyznaczyć kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma_{xy}$ , jeżeli znane są wartości trzech odkształceń liniowych  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\varepsilon_u$  zachodzących w płaszczyźnie  $0yx$ , odpowiednio w kierunkach:  $0x$ ,  $0y$  oraz  $0u$ . I tak na przykład, przy wartości kąta  $\alpha=45^\circ$ , gdy odkształcenie  $\varepsilon_u$  mierzone jest w kierunku dwusiecznej kąta zawartego między osiami  $0x$  i  $0y$ , to znaczy dla tzw. prostokątnej rozety odkształceń (rys. 16.6), jest

$$(\gamma_{xy})_{\alpha=45^\circ} = 2\varepsilon_u - (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (16.11)$$

Jak więc wynika ze wzorów (16.2) oraz (16.10) lub (16.11), do wyznaczenia wszystkich trzech składowych:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  dowolnego, płaskiego stanu naprężenia wystarcza znajomość odkształceń liniowych zachodzących w trzech kierunkach:  $0x$ ,  $0y$  i  $0u$ . Do pomiaru tych odkształceń konieczne jest zatem zastosowanie układów złożonych z trzech tensometrów, których podłużne osie siatek pomiarowych ustawione będą w trzech nierównoległych kierunkach. Z uwagi jednak na to, że rozmiary takiego układu są na ogół znaczne, a pola pomiarowe poszczególnych tensometrów dość odległe od wyznaczonego punktu pomiarowego, bardziej właściwe – z punktu widzenia dokładności pomiarów – jest stosowanie foliowych rozet tensometrycznych, których podstawowe typy to: rozeta prostokątna – TFrw-3/120 (rys. 16.4c), rozeta delta – TFr-8/120 (rys. 16.4d).

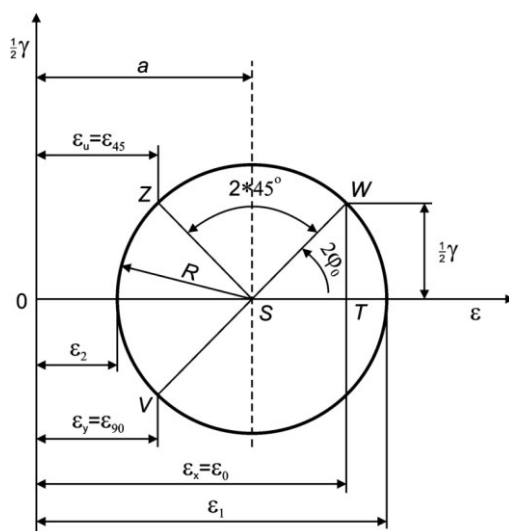
Przy wyznaczaniu składowych stanu naprężenia w dowolnym punkcie obciążonej konstrukcji konieczne jest wyznaczenie ich wartości maksymalnych oraz kierunków, w których one działają. Do wyznaczenia tych wielkości korzysta się z konstrukcji koła Mohra dla odkształceń [2]. Koło to rysuje się w układzie współrzędnych  $1/2\gamma$ - $\varepsilon$  według zasad znanych z geometrycznej analizy płaskiego stanu naprężenia na podstawie wyznaczonych doświadczalnie wartości względnych odkształceń liniowych  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  oraz  $\varepsilon_u$  lub składowych  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  oraz  $\gamma_{xy}$  stanu odkształcenia.

Przykładem jednego z najczęściej stosowanych układów pomiarowych jest układ prostokątny (rys. 16.6), w którym kierunki mierzonych odkształceń liniowych określane są – względem osi  $0x$  – kątami  $\alpha$  równymi:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ . A zatem

$$\varepsilon_x = (\varepsilon)_{\alpha=0^\circ} = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_u = (\varepsilon)_{\alpha=45^\circ} = \varepsilon_{45}, \quad \varepsilon_y = (\varepsilon)_{\alpha=90^\circ} = \varepsilon_{90}.$$

W celu zbudowania koła Mohra należy najpierw wyznaczyć położenie punktu  $S$ , będącego środkiem tego koła. Punkt ten leży na osi  $\varepsilon$  (rys. 16.7) w odległości

$$a = \overline{OS} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2}$$



Rysunek 16.7. Koło Mohra dla odkształceń.

od początku przyjętego układu współrzędnych. Następnie na odcinku

$$\overline{ST} = \varepsilon_0 - a,$$

jako przyprostokątnej, buduje się trójkąt  $STW$  o drugiej przyprostokątnej

$$\overline{TW} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_{45} - a.$$

Przeciwprostokątna  $\overline{SW}$  tego trójkąta jest promieniem  $R$  poszukiwanego koła

$$R = \overline{SW} = \sqrt{(\overline{ST})^2 + (\overline{TW})^2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (16.12)$$

Stąd, po wykorzystaniu wyrażenia (16.12) oraz wprowadzeniu dla względnych odkształceń liniowych tych oznaczeń, jakie przyjęto dla rozety prostokątnej, promień  $R$  wyraża się ostatecznie wzorem

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2}.$$

Jak wynika z konstrukcji koła Mohra (rys. 16.7), odkształcenia główne  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  wyrażają się jako

$$\varepsilon_{1,2} = a \pm R,$$

a zatem są określone wzorem

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2}. \quad (16.13)$$

W funkcji tych odkształceń określa się naprężenia główne  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  zgodnie ze wzorem (16.1) dla znanych stałych materiałowych  $E$  i  $\nu$ . Naprężenia te działają w kierunkach głównych, przy czym kierunek naprężenia głównego  $\sigma_1$  określony jest kątem  $\varphi_0$  (rys. 16.7), dla którego

$$-\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\overline{TW}}{\overline{ST}} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} - 2\varepsilon_{45}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90}}. \quad (16.14)$$

Tak więc, odczytując z koła Mohra dla odkształceń składowe:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}/2$  stanu odkształcenia można – na podstawie wzorów (16.2) – wyznaczyć składowe  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  stanu naprężenia. Składowe te można również określić z koła Mohra dla naprężeń zbudowanych na wartościach naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , wyznaczonych uprzednio na podstawie wzorów (16.1).

## 16.5. Układ pomiarowy

Podane w punkcie 16.3 wyniki teoretycznej analizy stanu naprężenia rozciąganej jednokierunkowo płyty, osłabionej kołowym otworem leżącym w jej środku, dotyczą płyty o nieograniczenie dużej szerokości. Wprawdzie podane tam wzory stanowią podstawę wyznaczania naprężeń również w płycie o skończonej szerokości  $b$ , jednakże rzeczywiste wartości naprężeń w takiej tarczy odbiegają od wartości obliczeniowych.

Wyznaczanie rzeczywistych wartości naprężeń zostanie przeprowadzone dla prostokątnej płyty o wymiarach 400mm x 600mm, mającej w środku otwór o średnicy  $d=2r_0=40$  mm, wykonanej z blachy o grubości  $g=1.6$ mm. Płyta jest rozciągana siłą  $P$ , przyłożoną w sposób zapewniający równomierne obciążenie wzdłuż jej krótszych brzegów. Praktyczną realizację takiego przyłożenia siły  $P$  do jednej z krawędzi płyty przedstawiono na zdjęciu pokazanym na rys. 16.8.

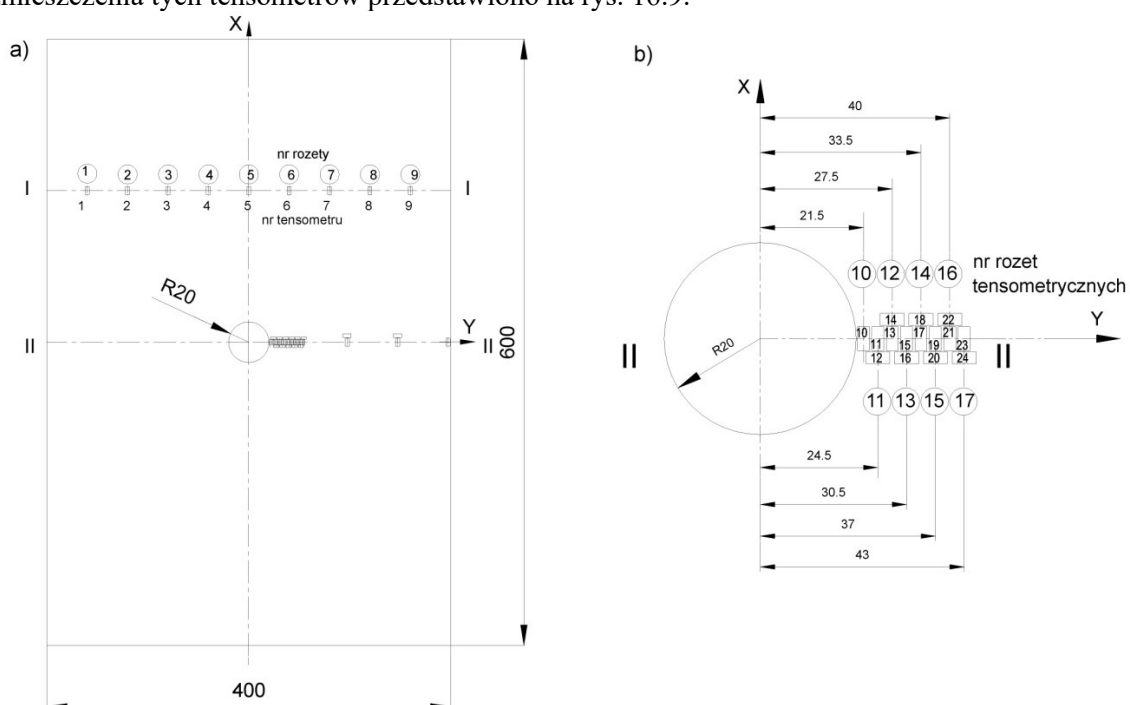
Zakłada się, że w przekroju I-I płyty panuje jednoosiowy stan naprężenia. Wystarczy zatem w tym przekroju nakleić pojedyncze tensometry wzdłuż kierunku obciążenia. Do wyznaczenia wartości naprężenia  $\sigma_0$  w przekroju I-I płyty wystarczy dokonać pomiaru odkształceń liniowych  $\varepsilon=\varepsilon_x=\varepsilon_1$ , zachodzących w kierunku działającego obciążenia i wykorzystać zależność 16.1.

W przekrojach II-II i III-III (rys. 16.2), jako pokrywających się z osiami symetrii płyty, naprężenia styczne są równe zeru, a zatem naprężenia normalne o kierunkach osi  $Ox$  i  $Oy$  są naprężeniami głównymi ( $\sigma_x=\sigma_1$  oraz  $\sigma_y=\sigma_2$ ). Naklejamy tu rozety tensometryczne typu T (dwa tensometry o kierunkach prostopadłych do siebie). Kierunki tensometrów muszą być zgodne z osiami  $Ox$  i  $Oy$ . Wartości naprężeń można wyznaczyć, mierząc odpowiadające liniowe odkształcenia główne  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  oraz wykorzystując zależności (16.1).



Rysunek 16.8. Badana płyta.

W celu uzyskania dostatecznej liczby danych, opisujących stan odkształcenia badanej płyty, na obydwu powierzchniach płyty naklecono odpowiednią liczbę tensometrów elektrooporowych. Schemat rozmieszczenia tych tensometrów przedstawiono na rys. 16.9.



Rysunek 16.9. Schemat rozmieszczenia tensometrów na płycie: a) całej, b) jej środkowej części.

W celu zwiększenia dokładności pomiarów – uwzględniając, że składowe stanu naprężenia płyty nie ulegają zmianie wzdłuż jej grubości – tensometry pomiarowe naklecono w tak samo położonych punktach na obydwu zewnętrznych powierzchniach płyty, a następnie odpowiadające sobie tensometry – w każdym z punktów – połączono szeregowo. W ten sposób eliminuje się naprężenia zginające



wynikające z efektu prostowania blachy, z której wykonano płytę. Każda para tak połączonych tensometrów, włączona jest do mostka tensometrycznego, przy jednoczesnym wprowadzeniu takiego samego zespołu tensometrów kompensacyjnych.

## 16.6. Wykonanie ćwiczenia

W celu określenia składowych stanu naprężenia w przekrojach I-I, II-II płyty (rys. 16.9) należy wyznaczyć odpowiednie składowe stanu odkształcenia, zgodnie z zasadami podanymi w punkcie 16.3.

Do pomiaru zastosowano sześćdziesiękanałowy automatyczny mostek tensometryczny UGR-60 firmy Hottinger. Każdemu tensometrowi został przydzielony numer kanału pomiarowego mostka tensometrycznego. Ponieważ w badaniach tensometrycznych pomiar oporności dokonywany jest z dokładnością do dziesiątych części  $\Omega$ , jakość styków i czas pomiaru odgrywają pierwszorzędą rolę. Do kompensacji wpływu temperatury zastosowano tensometry tego samego typu jak użyte do badania, lecz naklejone na nieobciążoną część badanej konstrukcji, która znajduje się w tej samej temperaturze, co badany obiekt. Typy poszczególnych rozet tensometrycznych oznaczono numerami:

Typ 1 – pojedynczy tensometr (rys. 16.4a);

Typ 2 – rozeta T – dwa tensometry o osiach prostopadłych (rys. 16.4b).

Każdą z rozet tensometrycznych oznaczono kolejnym numerem. Poszczególne rozety składają się z tensometrów podłączonych do odpowiednich kanałów mostka. Rozmieszczenie i numerację rozet tensometrycznych oraz tensometrów pokazano na rys. 16.9. Na przykład rozeta nr 11, typu 2, składa się z tensometrów nr 11 i 12.

Ćwiczenie polega na pomiarze za pomocą mostka tensometrycznego odkształceń we wszystkich punktach pomiarowych, a następnie obliczeniu w tych punktach wartości naprężeń.

Ażeby prawidłowo przeprowadzić ćwiczenie, należy wykonać następujące czynności:

- 1) Zapisać wskazania mostka ( $\varepsilon'$ ) dla wszystkich tensometrów bez obciążenia (stany zerowe).
- 2) Zwiększać naciąg płyty przez pokręcenie ramion dźwigni śruby pociągowej do wyczuwalnego oporu. Zapisać stany mostka ( $\varepsilon''$ ) dla wszystkich tensometrów przy naciągu (stany obciążenia).
- 3) Odciążyć płytę.
- 4) Obliczyć wartości odkształceń  $\varepsilon$  w każdym z tensometrów pomiarowych jako różnicę wskazań zapisów stanów mostka po i przed obciążeniem płyty

$$\varepsilon = \varepsilon'' - \varepsilon' \quad (16.15)$$

Współczesne mostki tensometryczne umożliwiają automatyzację czynności związanych z zapisem wskazań poszczególnych tensometrów, połączenie zaś mostka z komputerem i odpowiednie oprogramowanie pozwalają sterować urządzeniem oraz wykonać niezbędne obliczenia.

Tablica 16.1. Zestawienie rozet tensometrycznych.

ROZETY TENSOMETRYCZNE			
Nr rozety	Nr tensometrów w kierunku osi		
	$x$	$y$	$45^\circ$
1	1	0*	0
2	2	0	0
3	3	0	0
4	4	0	0
5	5	0	0
6	6	0	0
7	7	0	0
8	8	0	0
9	9	0	0
10	10	0	0
11	11	12	0
12	13	14	0
13	15	16	0

14	17	18	0
15	19	20	0
16	21	22	0
17	23	24	0
* W mostku tensometrycznym UGR-60 numeracja kanałów rozpoczyna się od 0.			

Wskazania mostka dla poszczególnych tensometrów zapisywane są w komputerze w pliku o nazwie TARCZA.txt. Zbiór składa się z dwóch tablic: pierwsza – wskazania tensometrów przed obciążeniem, druga – po obciążeniu płyty. W celu obliczenia naprężeń w poszczególnych punktach zbiornika należy wcześniej spisać numery tensometrów (kanałów pomiarowych), należące do poszczególnych rozet w układzie pokazanym w tablicy 16.1.

Obliczenia wykonywane są przez program TARCZA. Program zawiera menu umożliwiające m.in. wprowadzenie i kontrolę danych, czytanie zbioru wyników pomiarów z mostka tensometrycznego, obliczenia, wydruk wyników itp.

Do programu należy wprowadzić stałe materiałowe dla stali: moduł Younga  $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , liczbę Poissona  $\nu=0,3$ . Następnie należy wprowadzić dane dotyczące układu numerów tensometrów w poszczególnych rozetach zapisanych wcześniej (tablica 16.1). Program oblicza odkształcenia względne poszczególnych tensometrów i naprężenia (wzory (16.1)÷(16.2)) dla wcześniej zadeklarowanych numerów tensometrów w rozetach. Wyniki obliczeń są zapisywane w pliku WYNIKI (tabl. 16.2).

Dla przekroju I-I tarczy należy obliczyć wartość średnią naprężenia głównego  $\sigma_0$ , tj. średnią arytmetyczną naprężeń dla rozet nr 1÷9 (poz. 1÷9 tablicy wyników pomiarów).

Dla rozet tensometrycznych leżących wzdłuż przekroju II-II obliczyć odpowiednie wartości współczynników  $k_I = \sigma_I / \sigma_0$ . Wyniki nanieść na wykresy teoretyczne rozkładu współczynników (rys. 16.3).

Tablica 16.2. Naprężenia główne i zredukowane (przykładowe).

NAPRĘŻENIA GŁÓWNE I ZREDUKOWANE				
Nr rozety	$\sigma_x$ [MPa]	$\sigma_y$ [MPa]	$\sigma_{red}$ [MPa]	$\varphi$ [°]
1	16,0	0,0	16,0	0,0
2	16,1	0,0	16,1	0,0
3	15,7	0,0	15,7	0,0
4	16,7	0,0	16,7	0,0
5	19,9	0,0	19,9	0,0
6	16,9	0,0	16,9	0,0
7	16,3	0,0	16,3	0,0
8	16,2	0,0	16,2	0,0
9	16,8	0,0	16,8	0,0
10	42,4	0,0	42,4	0,0
11	32,4	5,0	30,2	0,0
12	29,7	5,6	27,3	0,0
13	26,0	5,8	23,7	0,0
14	22,5	4,3	20,7	0,0
15	25,4	5,1	23,3	0,0
16	20,1	3,7	18,5	0,0
17	19,8	3,0	18,5	0,0

Uwaga: Kąt  $\varphi$  (kierunek  $\sigma_x$ ) odmierza się od osi tensometru x w kierunku ZGODNYM z ruchem wskazówek zegara.

## 16.7. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1) cel ćwiczenia,
- 2) ważniejsze wzory określające składowe stanu naprężenia w rozciąganej jednokierunkowo płyty prostokątnej, osłabionej w środku kołowym otworem,
- 3) zasady wyznaczania składowych jednokierunkowego i płaskiego stanu naprężenia,
- 4) wyniki pomiarów otrzymane z komputera,
- 5) obliczenia współczynnika  $k_I$ ,

- 6) porównanie wyników otrzymanych na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych oraz wzorów teoretycznych – współczynnik  $k_I$  nanieść na wykres (rys. 16.3),
- 7) obliczyć rzeczywisty współczynnik koncentracji naprężeń dla badanej płyty (rozeta nr 10)
- 8) wyznaczenie naprężeń głównych dla określonej rozety na podstawie sczytanych głównych odkształceń.

## LITERATURA

[1] Roliński, Z., "*Tensometria oporowa. Podstawy teoretyczne i przykłady zastosowań*". WNT, Warszawa (1981).

[2] Niezgodziński, M. E., Niezgodziński T., "*Wytrzymałość materiałów*". Państwowe Wydaw. Naukowe, Warszawa (1979).